# OPERE

DI

# GALILEO GALILEI.

# OPERE

DI

# GALILEO GALILEI

NOBILE FIORENTINO.

VOLUME OTTAVO.





MILANO

Dalla Società Tipografica de' Classici Italiani
contrada del Cappuccio.
ANNO 1811.




# DISCORSI

E

# DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

*Intorno a due nuove scienze attenenti alla Meccanica, ed ai Movimenti Locali*

## DI GALILEO GALILEI

Linceo, Filosofo, e Matematico primario del Serenissimo

## GRAN DUCA DI TOSCANA

*Con un' Appendice del centro di gravità d' alcuni Solidi.*

*ALL' ILLUSTRISSIMO SIGNORE IL SIG.*

## CONTE DI NOAILLES

*Consiglier di S. M. Cristianissima, Cavalier dell' Ordine di Santo Spirito: Mariscalco de' suoi Campi, ed Eserciti: Siniscalco, e Governatore di Roerga, e Luogotenente per S. M. in Orvegna; Mio Sig. e Padr. Colendiss.*



*ILLUSTRISSIMO SIG.*

*Riconosco per un effetto della magnanimità di V. S. Illustrissima quanto gli è piaciuto disporre di questa Opera mia; non ostante che (come ella sa) confuso, e sbigottito dai mal fortunati successi di altre mie Opere, avendo meco medesimo determinato di non esporre in pubblico mai più alcuna delle mie fatiche, ma solo, acciò del tutto non restassero sepolte, essendomi persuaso di*

*lasciarne copia manoscritta in luogo conspicuo almeno a molti intelligenti delle materie da me trattate: e perciò avendo fatto elezione, per lo primo e più illustre luogo, di depositare in mano di V. S. Illustrissima sicuro, che per sua particolare affezione verso di me avrebbe avuto a cuore la conservazione de' miei studi, e delle mie fatiche; e perciò nel suo passaggio di qua, ritornando dalla sua Ambasciata di Roma, fui a riverirla personalmente, siccome più volte aveva fatto per lettere, e con tale incontro presentai a V. S. Illustrissima la copia di queste due Opere, che allora mi trovava avere in pronto, le quali benignamente mostrò di gradire molto, e di essere per farne sicura conserva; e col parteciparle in Francia a qualche amico suo, perito di queste scienze, mostrare, che sebbene io taceva, non però passava la vita del tutto oziosamente. Andava di poi apparecchiandomi di mandarne alcune altre copie in Germania, in Fiandra, in Inghilterra, in Ispagna, e forse anche in qualche luogo d' Italia, quando improvvisamente vengo dagli Elzeviri avvisato, come hanno sotto il torchio queste mie Opere, e che però io debba prendere risoluzione circa la dedicatoria, e prontamente mandargli il mio concetto sopra di ciò. Mosso da questa inopinata, e inaspettata nuova, sono andato meco medesimo concludendo, che*

*la brama di V. S. Illustrissima di suscitare, e ampliare il nome mio, col partecipare a diversi i miei scritti, abbia cagionato, che sieno pervenuti nelle mani dei detti stampatori; li quali essendosi adoperati in pubblicare altre mie Opere, abbiano voluto onorarmi di mandarle alla luce sotto le loro bellissime e ornatissime stampe. Perciò questi miei scritti debbono risentirsi, per aver avuta la sorte d' andar nell' arbitrio d' un sì gran giudice, il quale nel maraviglioso concorso di tante virtù, che rendono V. S. Illustrissima ammirabile a tutti, ella con incomparabile magnanimità, per zelo anco del ben pubblico, a cui gli è paruto che questa mia Opera dovesse conferire, ha voluto allargargli i termini, ed i confini dell' onore. Sicchè essendo il fatto ridotto in cotale stato, è ben ragionevole, che io con ogni segno più conspicuo mi dimostri grato riconoscitore del generoso affetto di V. S. Illustrissima che ha avuto cuore di accrescermi la mia fama, con farle spiegar le ale liberamente sotto il Cielo aperto, dove che a me pareva assai dono, che ella restasse in ispazj più angusti. Per tanto al nome vostro, Illustrissimo Signore, conviene che io dedichi, e consacri questo mio parto, al che fare mi stringe non solo il cumulo degli obblighi, che le tengo, ma l' interesse ancora, il quale (siami lecito così dire) mette in obbligo*

*V. S. Illustrissima di difendere la mia riputazione contro a chi volesse offenderla: mentre ella mi ha posto in isteccato contro agli avversarj. Onde facendomi avanti sotto il suo stendardo, e protezione umilmente me le inchino, con augurarle per premio di queste sue grazie il colmo d' ogni felicità, e grandezza.*

*D' Arcetri li* 6. *Marzo* 1638.

*Di V. S. Illustrissima.*

*Devot. Servo*
Galileo Galilei.

# GIORNATA PRIMA

*INTERLOCUTORI*

SALVIATI, SAGREDO,

E

SIMPLICIO.

---

*Salv.* Largo campo di filosofare agl' intelletti speculativi parmi, che porga la frequente pratica del famoso Arsenale (1) di voi Signori Veneziani, ed in particolare in quella parte, che Meccanica si domanda: attesochè quivi ogni sorta di strumento, e di macchina vien continuamente posta in opera da numero grande di artefici,

---

(1) *Tom. 2. ed. Fior.*

tra i quali e per l'osservazioni fatte dai loro antecessori, e per quelle, che di propria avvertenza vanno continuamente per se stessi facendo, è forza, che ve ne sieno dei peritissimi, e di finissimo discorso.

*Sagr.* V. S. non s'inganna punto: ed io, come per natura curioso, frequento per mio diporto la visita di questo luogo, e la pratica di questi, che noi per certa preminenza, che tengono sopra il resto della maestranza, domandiamo Proti; la conferenza dei quali mi ha più volte ajutato nell'investigazione della ragione di effetti non solo maravigliosi, ma reconditi ancora, e quasi inopinabili: è vero, che talvolta anco mi ha messo in confusione, e in disperazione di poter penetrare, come possa seguire quello, che lontano da ogni mio concetto mi dimostra il senso esser vero; e pur quello, che poco fa ci diceva quel buon vecchio, è un dettato, ed una proposizione bene assai vulgata; ma però io la reputava in tutto vana, come molte altre, che sono in bocca dei poco intelligenti, credo da loro introdotte per mostrar di saper dir qualche cosa intorno a quello, di che non son capaci.

*Salv.* V. S. vuol forse dire di quell'ultimo pronunziato, che ei proferì, mentre ricercavamo d'intendere, per qual ragione facevano tanto maggior apparecchio di sostegni, armamenti, ed altri ripari, e for-

tificazioni intorno a quella gran Galeazza, che si doveva varare, che non si fa intorno a' Vascelli minori, dove egli rispose ciò farsi per evitare il pericolo di direnarsi, oppressa dal gravissimo peso della sua vasta mole, incoveniente, al quale non son soggetti i legni minori?

*Sagr.* Di cotesto intendo, e sopra tutto dell' ultima conclusione, che ei soggiunse, la quale io ho sempre stimata concetto vano del vulgo: cioè che in queste ed altre simili macchine non bisogna argomentare dalle piccole alle grandi; perchè molte invenzioni di macchine riescono in piccolo, che in grande poi non sussistono. Ma essendo che tutte le ragioni della Meccanica hanno i fondamenti loro nella Geometria, nella quale non vedo, che la grandezza, e la piccolezza faccia i cerchi, i triangoli, i cilindri, i coni, e qualunque altre figure solide soggette ad altre passioni queste, e ad altre quelle, quando la macchina grande sia fabbricata in tutti i suoi membri conforme alle proporzioni della minore, che sia valida, e resistente all' esercizio, al quale ella è destinata, non so vedere, perchè essa ancora non sia esente dagl' incontri, che sopraggiugner gli possono sinistri, e destruttori.

*Salv.* Il detto del vulgo è assolutamente vano, e talmente vano, che il suo contrario si potrà profferire con altrettan-

ta verità, dicendo, che molte macchine si potranno far più perfette in grande, che in piccolo, come per esempio un Oriuolo, che mostri, e batta le ore, più giusto si farà di una tal grandezza, che di un' altra minore. Con miglior fondamento usurpano quel medesimo detto altri più intelligenti, i quali della riuscita di tali macchine grandi non conforme a quello, che si raccoglie dalle pure, ed astratte dimostrazioni Geometriche, ne rimettono la causa nell' imperfezione dalla materia, che soggiace a molte alterazioni, ed imperfezioni. Ma qui non so s' io potrò senza inciampare in qualche nota di arroganza dire, che nè anco il ricorrere all' imperfezioni della materia, potenti a contaminare le purissime dimostrazioni Matematiche, basti a scusare l'inobbedienza delle macchine in concreto alle medesime astratte e ideali: tuttavia io pure il dirò affermando, che astraendo tutte le imperfezioni della materia; e supponendola perfettissima, ed inalterabile, e da ogni accidental mutazione esente, tuttavia il solo esser materiale, fa, che la macchina maggiore fabbricata dell' istessa materia, e coll' istesse proporzioni, che la minore, in tutte l'altre condizioni risponderà con giusta simmetria alla minore, fuor che nella robustezza, e resistenza contro alle violenti invasioni: ma quanto più sarà grande, tanto a proporzione sarà più debole. E perchè io sup-

pongo la materia esser inalterabile, cioè sempre l'istessa, è manifesto, che di lei come di affezione esterna e necessaria, si possono produr dimostrazioni non meno dell'altre schiette, e pure matematiche. Però, Sig. Sagredo, revochi pur l'opinione, che teneva, e forse insieme con tutti gli altri, che nella Meccanica han fatto studio, che le macchine, e le fabbriche composte delle medesime materie con puntuale osservanza delle medesime proporzioni tra le loro parti debban essere egualmente, o per dir meglio, proporzionalmente disposte al resistere, e al cedere alle invasioni, ed impeti esterni, perchè si può Geometricamente dimostrare sempre le maggiori essere a proporzione men resistenti, che le minori: sicchè ultimamente non solo di tutte le macchine, e fabbriche artifiziali, ma delle naturali ancora sia un termine necessariamente ascritto, oltre al quale nè l'arte, nè la natura possa trapassare: trapassar dico con osservar sempre l'istesse proporzioni coll'identità della materia.

*Sagr.* Io già mi sento rivolgere il cervello, e quasi nugola dal baleno repentinamente aperta ingombrarmisi la mente da momentanea, ed insolita luce, che da lontano mi accenna, e subito confonde, ed asconde immaginazioni straniere, ed indigeste. E da quanto ella ha detto parmi che dovrebbe seguire, che fusse im-

possibil cosa costruire due fabbriche dell' istessa materia simili, e diseguali, e tra di loro con egual proporzione resistenti; e quando ciò sia, sarà anco impossibile trovar due sole aste dell' istesso legno tra di loro simili in robustezza, e valore, ma diseguali in grandezza.

*Salv.* Così è, Sig. Sagredo; e per meglio assicurarci, che noi convenghiamo nel medesimo concetto, dico, che se noi ridurremo un' asta di legno a tal lunghezza e grossezza, che fitta v. gr. in un muro ad angoli retti, cioè parallela all' orizzonte, sia ridotta all'ultima lunghezza, che si possa reggere, sicchè allungata un pelo più, si spezzasse gravata dal proprio peso, questa sarà unica al mondo: sicchè essendo per esempio la sua lunghezza centupla della sua grossezza, nessuna altra asta della medesima materia potrà ritrovarsi, che essendo in lunghezza centupla della sua grossezza, sia come quella precisamente abile a sostener se medesima, e nulla di più: ma tutte le maggiori si fiaccheranno, e le minori saranno potenti a sostenere oltre al proprio peso qualche altro appresso. E questo, che io dico dello stato di regger se medesimo, intendasi detto di ogni altra costituzione, e così se un corrente potrà reggere il peso di dieci correnti suoi eguali, una trave simile a lui non potrà altramente reggere il peso di dieci sue eguali. Ma notino in grazia V. S. e il Sig. e

il Sig. Simpl. nostro, quanto le conclusioni vere, benchè nel primo aspetto sembrino improbabili, additate solamente qualche poco depongono le vesti che le occultavano, e nude e semplici fanno de' loro segreti gioconda mostra. Chi non vede, come un cavallo cadendo da un' altezza di tre braccia, o quattro, si romperà l'ossa, ma un cane da una tale, e un gatto da una di otto, o dieci, non si farà mal nessuno, come nè un grillo da una torre, nè una formica precipitandosi dall'orbe lunare? I piccoli fanciulli restano illesi in cadute, dove i provetti si rompono gli stinchi, o la testa. E come gli animali più piccoli sono a proporzione più robusti, e forti dei maggiori, così le piante minori meglio si sostentano: e già credo, che amendue voi apprendiate, che una quercia dugento braccia alta non potrebbe sostenere i suoi rami sparsi alla similitudine di una di mediocre grandezza, e che la natura non potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, nè un gigante dieci volte più alto di un uomo, se non o miracolosamente, o coll'alterar assai le proporzioni delle membra, ed in particolare dell' ossa, ingrossandole molto e molto sopra la simetria dell' ossa comuni. Il creder parimente, che nelle macchine artifiziali ugualmente sieno fattibili, e conservabili le grandissime, e le piccole, è errore manifesto: e così per esempio piccole Guglie,

Colonnette, ed altre solide figure sicuramente si potranno maneggiare, distendere e rizzare senza risico di rompersi, che le grandissime per ogni sinistro accidente anderanno in pezzi, e non per altra cagione, che pel lor proprio peso. E qui è forza, che io vi racconti un caso degno veramente di esser saputo, come sono tutti gli accidenti, che accadono fuori dell'aspettazione, e massime quando il partito preso per ovviare a uno inconveniente riesce poi causa potissima del disordine. Era una grossissima Colonna di marmo distesa, e posata presso alle sue estremità sopra due pezzi di trave; cadde in pensiero dopo certo tempo ad un Meccanico, che fusse bene per maggiormente assicurarsi, che gravata dal proprio peso non si rompesse nel mezzo, supporgli anco in questa parte un terzo simile sostegno: parve il consiglio generalmente molto opportuno, ma l'esito lo dimostrò essere stato tutto l'opposito: attesochè non passarono molti mesi, che la Colonna si trovò fessa, e rotta giusto sopra il nuovo appoggio di mezzo.

*Simp.* Accidente in vero maraviglioso, e veramente *praeter spem*, quando però fusse derivato dall'aggiugnervi il nuovo sostegno di mezzo.

*Salv.* Da quello sicuramente derivò egli, e la riconosciuta cagion dell'effetto leva la maraviglia: perchè deposti in pia-

na terra i due pezzi della Colonna, si vede, che l'uno dei travi, su il quale appoggiava una delle testate, si era per la lunghezza del tempo infracidato, ed avvallato, e restando quel di mezzo durissimo, e forte, fu causa, che la metà della Colonna restasse in aria abbandonata dall' estremo sostegno; onde il proprio soverchio peso le fece fare quello, che non avrebbe fatto, se sola sopra i due primi si fosse appoggiata, perchè all'avvallarsi qual si fusse di loro, ella ancora l'avrebbe seguito. E qui non si può dubitare, che tal accidente non sarebbe avvenuto in una piccola Colonna, benchè della medesima pietra, e di lunghezza rispondente alla sua grossezza collà proporzione medesima della grossezza, e lunghezza della Colonna grande.

*Sagr.* Già sin qui resto io assicurato della verità dell'effetto, ma non penetro già la ragione, come nel crescersi la materia non debba coll' istesso ragguaglio multiplicarsi la resistenza, e gagliardia; e tanto più mi confondo, quanto per l'opposito vedo in altri casi crescersi molto più la robustezza alla resistenza al rompersi, che non cresce l'ingrossamento della materia; che se v. gr. saranno due chiodi fitti in un muro, l'uno più grosso il doppio dell'altro, quello reggerà non solamente doppio peso di questo, ma triplo, e quadruplo.

*Salv.* Dite pure ottuplo, nè direte lontano dal vero: nè questo effetto contraria a quello, ancorchè in sembiante apparisca così diverso.

*Sagr.* Adunque, Sig. Salviati, spianateci questi scogli, e dichiarateci queste oscurità, se ne avete il modo: che ben conghietturo questa materia delle resistenze essere un campo pieno di belle, ed utili contemplazioni, e se vi contentate, che questo sia il soggetto dei nostri ragionamenti di oggi, a me, e credo al Sig. Simp. sarà gratissimo.

*Salv.* Non posso mancar di servirle, purchè la memoria serva me in somministrarmi quello, che già appresi dal nostro Accademico, che sopra tal materia aveva fatte molte speculazioni, e tutte conforme al suo solito Geometricamente dimostrate, in modo che non senza ragione questa sua potrebbe chiamarsi una nuova scienza; perchè sebbene alcune delle conclusioni sono state da altri, e prima di tutti da Aristotile osservate, tuttavia ne sono delle più belle, nè (quello, che più importa) dai loro primarj, e indubitati fondamenti con necessarie dimostrazioni provate. E perchè, come dico, voglio dimostrativamente accertarvi, e non con solamente probabili discorsi persuadervi; supponendo, che abbiate quella cognizione delle conclusioni Meccaniche da altri sin qui fondatamente trattate, che per lo no-

stro bisogno sarà necessaria; conviene, che avanti ogni altra cosa consideriamo, quale effetto sia quello, che si opera nella frazione di un legno, o di altro solido, le cui parti saldamente sono attaccate; perchè questa è la prima nozione, nella qual consiste il primo, e semplice principio, che come notissimo conviene supporsi. Per più chiara esplicazione di che: segniamo il Cilindro, o Prisma A B ( Fig. 1. ) di legno, o di altra materia solida, e coerente, fermato di sopra in A, e pendente a piombo, al quale nell' altra estremità B sia attaccato il peso C; è manifesto, che qualunque si sia la tenacità, e coerenza tra di loro delle parti di esso solido, purchè non sia infinita, potrà esser superata dalla forza del traente peso C: la cui gravità pongo, che possa accrescersi, quanto ne piace, e esso solido finalmente si strapperà a guisa di una corda. E siccome nella corda noi intendiamo la sua resistenza derivare dalla moltitudine delle fila della canapa, che la compongono; così nel legno si scorgono le sue fibre, e filamenti distesi per lungo, che lo rendono grandemente più resistente allo strappamento, che non sarebbe qualsivoglia canapo della medesima grossezza: ma nel Cilindro di pietra, o di metallo la coerenza ( che ancora par maggiore ) delle sue parti dipende da altro glutine, che da filamenti, o fibre, e pure essi ancora da valido tiramento vengono spezzati.

*Simp.* Se il negozio procede, come voi dite, intendo bene, che i filamenti nel legno, che son lunghi, quanto l' istesso legno, posson renderlo gagliardo, e resistente a gran forza, che se gli faccia per romperlo: ma una corda composta di fili di canapa non più lunghi di due, o tre braccia l' uno, come potrà ridursi alla lunghezza di cento restando tanto gagliarda? In oltre vorrei anco sentire la vostra opinione intorno all'attaccamento delle parti dei metalli, delle pietre, e di altre materie prive di tali filamenti, che pur, s' io non m' inganno, è anco più tenace.

*Salv.* In nuove speculazioni, e non molto al nostro intento necessarie converrà divertire, se dovremo delle promosse difficoltà portar le soluzioni.

*Sagr.* Ma se le digressioni possono arrecarci la cognizione di nuove verità, che pregiudica a noi non obbligati a un metodo serrato, e conciso, ma che solo per proprio gusto facciamo i nostri congressi, digredire ora per non perder quelle notizie, che forse lasciate l' incontrata occasione, un' altra volta non ci si rappresenterebbe? Anzi chi sa, che bene spesso non si possano scoprir curiosità più belle delle primariamente cercate conclusioni? pregovi per tanto io ancora a dar soddisfazione al Sig. Simpl. e a me non men di esso curioso, e desideroso d' intender, qual sia quel glutine, che sì tenacemente ritien

congiunte le parti dei solidi, che pur finalmente sono dissolubili: cognizione, che pur anco è necessaria per intender la coerenza delle parti degli stessi filamenti, dei quali alcuni dei solidi son composti.

*Salv.* Eccomi a servirvi, poichè così vi piace. È la prima difficultà, come possono i filamenti di una corda lunga cento braccia sì saldamente connettersi insieme (non essendo ciascheduno di essi lungo più di due, o tre) che gran violenza ci voglia a disseparargli. Ma ditemi, Sig. Simp., non potreste voi di un sol filo di canapa tener l'una dell'estremità talmente stretta fra le dita, che io tirando dall'altra, prima che liberarlo dalla vostra mano, lo rompessi? certo sì: quando dunque i fili della canapa fosser non solo nell'estremità, ma in tutta la lor lunghezza con gran forza da chi gli circondasse tenuti stretti, non è manifesta cosa, che lo sbarbargli da chi gli stringe sarebbe assai più difficile, che rompergli? ma nella corda l'istesso atto dell'attorcerla stringe le fila scambievolmente tra di loro, in maniera che tirando poi con gran forza la fune, i suoi filamenti si spezzano, e non si separano l'uno dall'altro; come manifestamente si conosce dal vedersi nella rottura i filamenti cortissimi, e non lunghi almeno un braccio l'uno, come dovria vedersi, quando la division della corda si facesse non per lo strappamento delle fila, ma per la

sola separazione dell' uno dall' altro strisciando.

*Sagr.* Aggiungasi in confermazion di questo il vedersi talvolta romper la corda non pel tirarla per lo lungo, ma solo per lo soverchiamente attorcerla: argomento pare a me concludente, le fila esser talmente tra di loro scambievolmente compresse, che le comprimenti non permettono alle compresse scorrer quel minimo, che sarebbe necessario per allungar le spire, acciocchè potessero circondar la fune, che nel torcimento si scorcia, ed in conseguenza qualche poco s' ingrossa.

*Salv.* Voi benissimo dite: ma considerate appresso, come una verità si tira dietro l' altra. Quel filo, che stretto tra le dita non segue chi con qualche forza tirandolo vorrebbe di tra esse sottrarlo, resiste, perchè da doppia compressione vien ritenuto; imperciocchè non meno il dito superiore preme contro all' inferiore, che questo si prema contro a quello. E non è dubbio, che quando di queste due premute se ne potesse ritenere una sola, resterebbe la metà di quella resistenza, che dalle due congiunte dipendeva: ma perchè non si può coll' alzar, v. gr. il dito superiore levar la sua pressione senza rimuovere anco l' altra parte, conviene con nuovo arzifizio conservarne una di loro, e trovar modo, che l' istesso filo comprima se medesimo contro al dito, o altro corpo

solido, sopra il quale si posa, e far sì che l'istessa forza, che le tira per separarnelo, tanto più ve lo comprima, quanto più gagliardamente lo tira: e questo si conseguirà coll' avvolgere a guisa di spira il filo medesimo intorno al solido. Il che acciò meglio s' intenda, ne segnerò un poco di figura; e questi A B, C D (Fig. II.) siano due cilindri, e tra essi disteso il filo E F, che per maggior chiarezza ce lo figureremo essere una cordicella: non è dubbio, che premendo gagliardamente i due cilindri l'uno contro all' altro, la corda F E tirata dall' estremità F resisterà a non piccola violenza prima che scorrere tra i due solidi comprimentila: ma se rimuoveremo l' uno di loro, la corda, benchè continui di toccar l' altro, non però da tal toccamento sarà ritenuta, che liberamente non iscorra. Ma se ritenendola, benchè debolmente attaccata verso la sommità del cilindro A, l' avvolgeremo intorno a quello a foggia di spira A F L O T R, e dal capo R la tireremo, è manifesto, che ella comincierà a stringere il cilindro, e se le spire, e voltate saranno molte, sempre più nel validamente tirare si comprimerà la corda addosso al cilindro: e facendosi colla moltiplicazione delle spire più lungo il toccamento, ed in conseguenza men superabile, difficile si farà sempre più lo scorrer della corda, e l' acconsentir alla traente forza. Or chi non vede, che tale

è la resistenza delle filamenta, che con mille, e mille simili avvolgimenti il grosso canapo contessono? Anzi lo strignimento di simili tortuosità collega tanto tenacemente, che di non molti giunchi, nè anco molto lunghi, sicchè poche sono le spire, colle quali tra di loro s'intrecciano, si compongono robustissime funi, che mi par, che domandino fuste.

*Sagredo.* Cessa per lo vostro discorso nella mia mente la maraviglia di due effetti, dei quali le ragioni non bene erano comprese da me. Uno era il vedere, come due, o al più tre rivolte del canapo intorno al fuso dell'argano potevano non solamente ritenerlo, che tirato dall'immensa forza del peso, che ei sostiene, scorrendo non gli cedesse, ma che di più girando l'argano il medesimo fuso col solo toccamento del canapo, che lo stringe, potesse colli succedenti ravvolgimenti tirare, e sollevare vastissime pietre, mentre che le braccia di un debile ragazzo vanno ritenendo, e radunando l'altro capo del medesimo canapo. L'altro è di un semplice, ma arguto ordigno trovato da un giovane mio parente, per poter con una corda calarsi da una finestra senza scorticarsi crudelmente le palme delle mani, come poco tempo avanti gli era intervenuto con sua grandissima offesa. Nè farò per facile intelligenza un piccolo schizzo. Intorno a un simil cilindro di legno A B (Fig. III.)

grosso, come una canna, e lungo circa un palmo incavò un canaletto in forma di spira di una voltata, e mezzo, e non più, e di larghezza capace della corda, che voleva adoprare; e questa fece entrare per lo canale dal termine A, e uscire per l'altro B, circondando poi tal cilindro, e corda con un cannone pur di legno, ovvero anco di latta, ma diviso per lungo, ed ingangherato, sicchè liberamente potesse aprirsi, e chiudersi: ed abbracciando poi, e stringendo con ambe le mani esso cannone, raccomandata la corda a un fermo ritegno di sopra, si sospese su le braccia, e riuscì tale la compressione della corda tra il cannone ambiente, e il cilindro, che ad arbitrio suo strignendo fortemente le mani poteva sostenersi senza calare, ed allentandole un poco si calava lentamente a suo piacimento.

*Sal.* Ingegnosa veramente invenzione, e per intera esplicazione della sua natura mi par di scorgere così per ombra, che qualche altra speculazione si potesse aggiugnere: ma non voglio per ora digredir più sopra di questo particolare; e massime volendo voi sentire il mio pensiero intorno alla resistenza allo strapparsi degli altri corpi, la cui testura non è di filamenti, come quella delle funi, e della maggior parte dei legni, ma la coerenza delle parti loro in altre cagioni par che consista, le quali per mio giudizio si riducono a

due capi; l'uno dei quali è quella decantata repugnanza che ha la natura all'ammettere il vacuo: per l'altro bisogna (non bastando questo del vacuo) introdur qualche glutine, visco, o colla, che tenacemente colleghi le particole, delle quali esso corpo è composto. Dirò prima del vacuo, mostrando con chiare esperienze, quale e quanta sia la sua virtù. E prima il vedersi, quando ne piaccia, due piastre di marmo, di metallo, o di vetro esquisitamente spianate, pulite, e lustre, che posata l'una su l'altra, senza veruna fatica se gli muove sopra strisciando (sicuro argomento, che nessun glutine le congiunge) ma, che volendo separarle, mantenendole equidistanti, tal repugnanza si trova, che, la superiore solleva, e si tira dietro l'altra, e perpetuamente la ritiene sollevata, ancorchè assai grossa, e grave, evidentemente ci mostra l'orrore della natura nel dover ammettere, sebben per breve momento di tempo, lo spazio voto, che tra di quelle rimarrebbe, avanti che il concorso delle parti dell'aria circostante l'avesse occupato, e ripieno. Vedesi anco, che quando bene tali due lastre non fossero esattamente pulite, e perciò che il lor contatto non fosse esquisito del tutto, nel volerle separar lentamente niuna renitenza si trova fuor di quella della sola gravità, ma in un alzamento repentino l'inferior pietra si solleva, ma

subito ricade, seguendo solamente la sovrana per quel brevissimo tempo, che basta per la distrazione di quella poca di aria, che s'interponeva tra le lastre, che non ben combagiavano, e per l'ingresso dell'altra circonfusa. Tal resistenza, che così sensatamente si scorge tra le due lastre, non si può dubitare, che parimente non risegga tra le parti di un solido, e che nel loro attaccamento non entri almanco a parte, e come causa concomitante.

*Sagr*. Fermate di grazia, e concedetemi, che io dica una particolar considerazione, che pure ora mi è caduta in mente: e questa è, che il vedere, come la piastra inferiore segue la superiore, e che con moto velocissimo vien sollevata, ci rende sicuri, che contro al detto di molti Filosofi, e forse di Aristotile medesimo, il moto nel vacuo non sarebbe instantaneo; perchè quando fosse tale, le nominate due lastre senza repugnanza veruna si separerebbero, giacchè il medesimo instante di tempo basterebbe per la loro separazione, e per lo concorso dell'aria ambiente a riempir quel vacuo, che tra esse potesse restare. Dal seguir dunque che fa l'inferior lastra la superiore, si raccoglie, come nel vacuo il moto non sarebbe instantaneo. E si raccoglie insieme, che pur tra le medesime piastre resti qualche vacuo almeno per brevissimo tempo, cioè per tutto quello, che passa nel

movimento dell'ambiente, mentre concorre a riempire il vacuo: che se vacuo non vi restasse, nè di concorso, nè di moto di ambiente vi sarebbe bisogno. Converrà dunque dire, che pur per violenza, o contro a natura il vacuo talor si conceda (benchè l'opinion mia è, che nessuna cosa sia contro a natura, salvo che l'impossibile, il quale poi non è mai.) Ma qui mi nasce un' altra difficoltà; ed è, che sebben l'esperienza mi assicura della verità della conclusione, l'intelletto non resta già interamente appagato della causa, alla quale cotale effetto viene attribuito. Imperocchè l'effetto della separazione delle due lastre è anteriore al vacuo, che in conseguenza alla separazione succederebbe: e perchè mi pare, che la causa debba se non di tempo, almeno di natura precedere all'effetto, e che di un effetto positivo positiva altresì debba esser la causa, non resto capace, come dell'aderenza delle due piastre, e della repugnanza all'esser separate, effetti, che già sono in atto, si possa riferir la cagione al vacuo, che non è, ma che avrebbe a seguire. E delle cose, che non sono, nessuna può esser l'operazione, conforme al pronunziato certissimo del Filosofo.

*Simp*. Ma giacchè concedete questo assioma ad Aristotile, non credo, che siate per negargliene un altro bellissimo, e vero: e questo è, che la natura non

intraprende a voler fare quello, che repugna ad esser fatto: dal qual pronunciato mi par: che dipenda la soluzione del nostro dubbio, perchè dunque a se medesimo repugna esser uno spazio vacuo, vieta la natura il far quello, in conseguenza di che necessariamente succederebbe il vacuo; e tale è la separazione delle sue lastre.

*Sagr.* Ora ammesso per soluzione adequata del mio dubbio questo, che produce il Sig. Simplicio, seguitando il cominciato discorso, parmi, che questa medesima repugnanza al vacuo dovrebbe esser bastante ritegno delle parti di un solido di pietra, o di metallo, o se altre ve ne sono, che più saldamente stiano congiunte, e renitenti alla divisione. Perchè se di uno effetto una sola è la cagione, siccome io ho inteso, e creduto, o se pur molte se ne assegnano, ad una sola si riducono; perchè questa del vacuo, che sicuramente è, non basterà per tutte le resistenze?

*Salv.* Io per ora non voglio entrare in questa contesa, se il vacuo senza altro ritegno sia per se solo bastante a tenere unite le parti disunibili dei corpi consistenti, ma vi dico bene, che la ragione del vacuo, che milita, e conclude nelle due piastre, non basta per se sola al saldo collegamento delle parti di un solido cilindro di marmo, o di metallo, le quali

violentate da forze gagliarde, che dirittamente le tirino, finalmente si separano, e si dividono. E quando io trovi modo di distinguer questa già conosciuta resistenza dipendente dal vacuo da ogni altra, qualunque ella si fosse, che con lei concorresse in fortificar l'attaccamento, e che io vi faccia vedere, come essa sola non sia a gran pezzo bastante per tale effetto, non concederete voi, che sia necessario introdurne altra? Ajutatelo, Sig. Simplicio, giacchè egli sta ambiguo sopra quello, che debba rispondere.

*Simp.* È forza, che la sospensione del Sig. Sagredo sia per altro rispetto, non restando luogo di dubitare sopra sì chiara, e necessaria conseguenza.

*Sagr.* Voi, Sig. Simplicio, l'avete indovinata. Andava pensando, se non bastando un milion di oro l'anno, che vien di Spagna per pagar l'esercito, fusse necessario fare altra provvisione, che di danari per le paghe de'Soldati. Ma seguitate pur, Sig. Salviati, e supponendo, che io ammetta la vostra conseguenza, mostrateci il modo di separare l'operazione del vacuo dall'altre, e misurandola fateci vedere, come ella sia scarsa per l'effetto, di che si parla.

*Salv.* Il vostro Demonio vi assiste. Dirò il modo dell'apparar la virtù del vacuo dall'altre, e poi la maniera del misurarla. E per appartarla piglieremo una

materia continua, le cui parti manchino di ogni altra resistenza alla separazione fuor che di quella del vacuo, quale a lungo è stato dimostrato in certo Trattato del nostro Accademico esser l'acqua. Talchè qualunque volta si disponesse un cilindro di acqua, e che attratto si sentisse resistenza allo staccamento delle sue parti, questo da altra cagione, che dalla repugnanza al vacuo, non potrebbe riconoscersi. Per far poi una tale esperienza mi sono immaginato un artifizio, il quale coll'ajuto di un poco di disegno meglio, che con semplici parole, potrò dichiarare. Figurò questo C A B D (Fig. IV) essere il profilo di un cilindro di metallo, o di vetro, che sarebbe meglio voto dentro, ma giustissimamente tornito, nel cui concavo entri con esquisitissimo contatto un cilindro di legno, il cui profilo noto E G H F, il qual cilindro si possa spignere in su, e in giù, e questo voglio, che sia bucato nel mezzo, sicchè vi passi un filo di ferro oncinato nell'estremità K, e l'altro capo I vada ingrossandosi in forma di cono, o turbine, facendo che il foro fatto nel legno sia nella parte di sopra esso ancora incavato in forma di conica superficie aggiustata puntualmente per ricevere la conica estremità I del ferro I K, qualunque volta si tiri in giù dalla parte K. Inserto il legno, o vogliamolo chiamar zaffo E H nel cavo cilindro A D,

non voglio, che arrivi sino alla superior superficie di esso cilindro, ma che ne resti lontano due, o tre dita, e tale spazio dee esser ripieno di acqua, la quale vi si metterà tenendo il vaso colla bocca C D all'insù, e calandovi sopra lo zaffo E H, col tenere il turbine I remoto alquanto dal cavo del legno, per lasciar l'esito all'aria, che nel calcare lo zaffo se ne uscirà per lo foro del legno, che perciò si fa alquanto più largo della grossezza dell'asticciuola di ferro I K. Dato l'esito all'aria, e ritirato il ferro, che ben suggelli su il legno col suo turbine, si rivolterà il vaso tutto colla bocca all'ingiù, ed attaccando all'oncino K un recipiente da mettervi dentro rena, o altra materia grave, si caricherà tanto, che finalmente la superior superficie E F dello zaffo si staccherà dall'inferiore dell'acqua, alla quale niente altro la teneva congiunta, che la repugnanza del vacuo: pesando poi lo zaffo col ferro, col recipiente, e con ciò, che vi sarà dentro, averemo la quantità della forza del vacuo: e se attaccato a un cilindro di marmo, o di cristallo grosso, quanto il cilindro dell'acqua, però tale, che insieme col peso proprio dell'istesso marmo, o cristallo pareggi la gravità di tutte le nominate bagaglie, ne seguirà la rottura, potremo senza verun dubbio affermare, la sola ragion del vacuo tener le parti del marmo, e cristallo congiunte:

ma non bastando, e che per romperlo bisogni aggiugnervi quattro volte altrettanto peso, converrà dire la resistenza del vacuo esser delle cinque parti una, e l'altra quadrupla di quella del vacuo.

*Simpl.* Non si può negare, che l'invenzione non sia ingegnosa, ma l'ho per soggetta a molte difficoltà, che me la rendono dubbia; perchè chi ci assicura, che l'aria non possa penetrar tra il vetro, e lo zaffo, ancorchè si circondi bene di stoppa, o altra materia cedente? e così, acciocchè il cono I saldi bene il foro, forse non basterebbe l'ungerlo con cera, o trementina. In oltre perchè non potrebbero le parti dell'acqua distrarsi, e rarefarsi? perchè non penetrare aria, o esalazioni, o altre sostanze più sottili per le porosità del legno, o anche dell'istesso vetro?

*Salv.* Molto destramente ci muove il Sig. Simplicio le difficoltà, ed in parte ci somministra i rimedj, quanto alla penetrazion dell'aria per lo legno, o tra il legno, e il vetro. Ma io oltre di ciò noto, che potremo nell'istesso tempo accorgerci con acquisto di nuove cognizioni, se le promosse difficoltà avranno luogo. Imperocchè se l'acqua sarà per natura, sebben con violenza distraibile, come accade nell'aria, si vedrà lo zaffo calare; e se faremo nella parte superiore del vetro un poco di ombelico prominente, come que-

sto V, penetrando per la sostanza, o porosità del vetro, o del legno aria, o altra più tenue, e spiritosa materia, si vedrà radunare (cedendogli l'acqua) nell'eminenza V, le quali cose quando non si scorgano, verremo assicurati l'esperienza esser colle debite cautele stata tentata; e conosceremo l'acqua non esser distraibile, nè il vetro esser permeabile da veruna materia, benchè sottilissima.

*Sagr.* Ed io mercè di questi discorsi ritrovo la causa di un effetto, che lungo tempo mi hà tenuto la mente ingombrata di maraviglia, e vota d'intelligenza. Osservai già una Citerna, nella quale per trarne l'acqua fu fatto fare una tromba da chi forse credeva, ma vanamente, di poterne cavare con minor fatica l'istessa, o maggior quantità, che colle secchie ordinarie: ed ha questa tromba il suo stantuffo, e animella su alta, sicchè l'acqua si fa salire per attrazione, e non per impulso, come fanno le trombe, che hanno l'ordigno da basso. Questa, sinchè nella Citerna vi è acqua sino ad una determinata altezza, la tira abbondantemente, ma quando l'acqua abbassa oltre a un determinato segno, la tromba non lavora più. Io credetti la prima volta che osservai tale accidente, che l'ordigno fosse guasto, e trovato il Maestro, acciò lo raccomodasse, mi disse, che non vi era altrimente difetto alcuno, fuor che nell'acqua, la quale

essendosi abbassata troppo, non pativa di essere alzata a tanta altezza; e mi soggiunse nè con Trombe, nè con altra macchine, che sollevi l'acqua per attrazione, esser possibile farla montare un capello più di diciotto braccia, e sieno le Trombe larghe, o strette, questa è la misura dell'altezza limitatissima. Ed io sin ora sono stato così poco accorto, che intendendo, che una corda, una mazza di legno, e una verga di ferro si può tanto e tanto allungare, che finalmente il suo proprio peso la strappi, tenendola attaccata in alto, non mi è sovvenuto, che l'istesso molto più agevolmente accaderà di una corda, o verga di acqua. E che altro è quello, che si attrae nella Tromba, che un cilindro di acqua, il quale avendo la sua attaccatura di sopra, allungato più e più, finalmente arriva a quel termine, oltre al quale tirato dal suo già fatto soverchio peso non altrimente, che se fosse una corda, si strappa?

*Salv.* Così puntualmente cammina il negozio, e perchè la medesima altezza delle diciotto braccia è il prefisso termine dell'altezza, alla quale qualsivoglia quantità di acqua, sieno cioè le Trombe larghissime, o strette, o strettissime, quanto un fil di paglia, può sostentarsi, tuttavolta che noi peseremo l'acqua contenuta in diciotto braccia di cannone, sia largo, o stretto, avremo il valore della resistenza

del vacuo nei cilindri di qualsivoglia materia solida, grossi, quanto sono i concavi dei cannoni proposti. E giacchè abbiamo detto tanto, mostriamo come di tutti i metalli, pietre, legni, vetri, ec. si può facilmente ritrovare sino a quanta lunghezza si potrebbono allungare cilindri, fili, o verghe di qualsivoglia grossezza, oltre alla quale gravati dal proprio peso più non potrebber reggersi, ma si strapperebbero. Piglisi per esempio un fil di rame di qualsivoglia grossezza, e lunghezza, e fermato un de' suoi capi ad alto, si vada aggiugnendo all' altro maggior e maggior peso, sicchè finalmente si strappi, e sia il peso massimo, che potesse sostenere, v. gr. cinquanta libbre. È manifesto, che cinquanta libbre di rame oltre al proprio peso, che sia per esempio un ottavo di oncia tirato in filo di tal grossezza, sarebbe la lunghezza massima del filo, che se stesso potesse reggere. Misurisi poi quanto era lungo il filo, che si strappò, e sia, v. gr. un braccio: e perchè pesò un ottavo di oncia, e resse se stesso, e cinquanta libbre appresso, che sono ottavi di oncia quattromila ottocento, diremo tutti i fili di rame, qualunque si sia la lor grossezza, potersi reggere sino alla lunghezza di quattromila ottocento un braccio, e non più; e così una verga di rame potendo reggersi sino alla lunghezza di quattromila ottocento un braccio, la resistenza che ella

trova dipendente dal vacuo, rispetto al restante è tanta, quanto importa il peso di una verga di acqua lunga braccia diciotto, e grossa quanto quella stessa di rame; e trovandosi v. gr. il rame esser nove volte più grave dell'acqua, di qualunque verga di rame la resistenza allo strapparsi, dipendente dalla ragion del vacuo, importa quanto è il peso di due braccia dell'istessa verga; e con simil discorso, ed operazione si potranno trovare le lunghezze delle fila, o verghe di tutte le materie solide ridotte alla massima, che sostener si possa, ed insieme qual parte abbia il vacuo nella lor resistenza.

*Sagr.* Resta ora, che ci dichiate in qual cosa consista il resto della renitenza, cioè, qual sia il glutine o visco, che ritiene attaccate le parti del solido, oltre a quello che deriva dal vacuo, perchè io non saprei immaginarmi, qual colla, sia quella, che non possa essere arsa e consumata in una ardentissima fornace in due, tre e quattro mesi, nè in dieci o cento, dove stando tanto tempo argento, oro, e vetro liquefatti, cavati poi tornano le parti loro nel freddarsi a riunirsi e rattaccarsi, come prima. Oltrechè la medesima difficoltà, che ho nell'attaccamento delle parti del vetro, l'avrò io nelle parti della colla, cioè, che cosa sia quella, che le tiene così saldamente congiunte.

*Salv.* Pur poco fa vi dissi, che il va-

stro Demonio vi assisteva: sono io ancora nelle medesime angustie, ed ancora io toccando con mano, come la repugnanza del vacuo è indubitabilmente quella che non permette, se non con gran violenza, la separazione delle due lastre, e più delle due gran parti della Colonna di marmo o di bronzo, non so vedere come abbia ad aver luogo, ed esser parimente cagione della coerenza delle parti minori, e sino delle minime ultime delle medesime materie; ed essendo che di un effetto una sola è la vera e purissima causa, mentre io non trovo altro glutine, perchè non debbo tentar di vedere, se questo del vacuo che si trova, può bastarci?

*Simp.* Se di già voi avete dimostrato la resistenza del gran vacuo nel separarsi le due gran parti di un solido esser piccolissima in comparazion di quella che tien congiunte le particole minime, come non volete tener più che per certo, questa esser diversissima da quella?

*Salv.* A questo rispose il Sig. Sagr. che pur si pagavano tutti i particolari Soldati con danari raccolti da imposizioni generali di soldi e di quattrini, sebbene un milion di oro non bastava a pagar tutto l'esercito. E chi sa, che altri minutissimi vacui non lavorino per le minutissime particole, sicchè per tutto sia dell'istessa moneta quello con che si tengono tutte le parti congiunte? Io vi dirò quello che ta-

lora mi è passato per l'immaginazione: ve lo do, non come verità risoluta, ma come una qual si sia fantasia piena anco d'indigestioni sottoponendola a più alte contemplazioni. Cavatene se nulla vi è che vi gusti; il resto giudicatelo, come più vi pare. Nel considerar talvolta, come andando il fuoco serpendo tra le minime particelle di questo, e di quel metallo, che tanto saldamente si trovano congiunte, finalmente le separa e disunisce; e come poi partendosi il fuoco tornano colla medesima tenacità di prima a ricongiungersi senza diminuirsi punto la quantità nell'oro, e pochissimo in altri metalli anco per lungo tempo, che restino distrutti, pensai, che ciò potesse accadere, perchè le sottilissime particole del fuoco penetrando per gli angusti pori del metallo (tra i quali per la loro strettezza non potessero passare i minimi dell'aria, nè di molti altri fluidi) col riempire i minimi vacui tra esse frapposti liberassero le minime particole di quello dalla violenza, colla quale i medesimi vacui l'una contro l'altra attraggono, proibendogli la separazione; e così potendosi liberamente muovere, la lor massa ne divenisse fluida, e tale restasse, sin che gl'ignicoli tra esse dimorassero: partendosi poi quelli, e lasciando i pristini vacui, tornasse la lor solita attrazione, ed in conseguenza l'attaccamento delle parti. Ed all'instanza del Sig. Simp. parmi che si pos-

sa rispondere, che sebbene tali vacui sarebber piccolissimi, ed in conseguenza ciascheduno facile ad esser superato, tuttavia l'innumerabile moltitudine innumerabilmente (per così dire) multiplica le resistenze: e quale, e quanta sia la forza, che da numero immenso di debolissimi momenti insieme congiunti risulta, porgacene evidentissimo argomento il veder noi un peso di milioni di libbre sostenuto da canapi grossissimi, cedere, e finalmente lasciarsi vincere e sollevare dall' assalto degl' innumerabili atomi di acqua, li quali, o spinti dall' Austro, o pure che distesi in tenuissima nebbia si vadano movendo per l'aria, vanno a cacciarsi tra fibra e fibra dei canapi tiratissimi, nè può l'immensa forza del pendente peso vietargli l'entrata; sicchè penetrando per gli angusti meati ingrossano le corde, e per conseguenza le scorciano, onde la mole gravissima a forza vien sollevata.

*Sagr.* Ei non è dubbio alcuno, che mentre una resistenza non sia infinita, può dalla moltitudine di minutissime forze esser superata; sicchè anco un numero di formiche strascicherebbe per terra una nave carica di grano: perchè il senso ci mostra quotidianamente, che una formica destramente porta un granello; e chiara cosa è, che nella nave non sono infiniti granelli, ma compresi dentro a qualche numero, del quale se ne può prendere un

altro quarto, e sei volte maggiore, al quale se se ne prenderà un altro di formiche eguale, e si porranno in opera, condurranno per terra il grano, e la nave ancora. È ben vero, che bisognerà, che il numero sia grande, come anco per mio parere quello dei vacui che tengono attaccati i minimi del metallo.

*Sal.* Ma quando bisognasse, che fussero anche infiniti, l'avete voi forse per impossibile?

*Sagr.* No, quando quel metallo fusse una mole infinita: altrimenti

*Salv.* Altrimenti che? Orsù già che si è messo mano ai Paradossi, vediamo se in qualche maniera si potesse dimostrare, come in una continua estensione finita non repugni il potersi ritrovare infiniti vacui: e nell'istesso tempo ci verrà se non altro, almeno arrecata una soluzione del più ammirabile problema, che sia da Aristotile messo tra quelli che esso medesimo addimanda ammirandi, dico tra le questioni Meccaniche; e la soluzione potrebbe esser per avventura non meno esplicante e concludente di quella che egli medesimo ne arreca, e diversa anco da quello che molto acutamente vi considera il dottissimo Mons. di Guevara. Ma bisogna prima dichiarare una proposizione non toccata da altri, dalla quale dipende lo scioglimento della quistione, che poi, s'io non m'inganno, si tira dietro altre notizie nuove e ammirande.

Per intelligenza di che accuratamente descriveremo la figura. Però intendiamo un poligono equilatero ed equiangolo di quanti lati esser si voglia, descritto intorno a questo centro G ( Fig. v.) e sia per ora un esagono A B C D E F, simile al quale, e ad esso concentrico ne descriveremo un altro minore, quale noteremo H I K L M N, e del maggiore si prolunghi un lato A B indeterminatamente verso S, e del minore il rispondente lato H I sia verso la medesima parte similmente prodotto, segnando la linea H T parallela all' A S, e pel centro passi l'altra alle medesime equidistante G V. Fatto questo il maggior poligono rivolgasi sopra la linea A S portando seco l'altro poligono minore. È chiaro che stando fisso il punto B termine del lato A B, mentre si comincia la revoluzione, l'angolo A si solleverà, e'l punto C s'abbasserà descrivendo l'arco C Q, sicchè il lato B C si adatti alla linea a se stesso eguale B Q: ma in tal conversione l'angolo I del minor poligono si eleverà sopra la linea I T, per esser la I B obbliqua sopra l'A S: nè prima tornerà il punto I su la parallela I T, se non quando il punto C sarà pervenuto in Q: allora l' I sarà caduto in O, dopo aver descritto l'arco I O fuori della linea H T, ed allora il lato I K sarà passato in O P. Ma il centro G tra tanto sempre averà camminato fuori della linea G V, su la quale non sarà tornato, se non dopo aver

descritto l'arco G C. Fatto questo primo passo, il poligono maggiore sarà trasferito a posare col lato B C su la linea B Q, il lato I K del minore sopra la linea O P, avendo saltata tutta la parte I O senza toccarla, e 'l centro G pervenuto in C, facendo tutto il suo corso fuori della parallela G V. E finalmente tutta la figura si sarà rimessa in un posto simile al primo; sicchè continuandosi la revoluzione, e venendo al secondo passo il lato del maggior poligono D C si adatterà alla parte Q X, il K L del minore (avendo prima saltato l'arco P Y) caderà in Y Z, ed il centro procedendo sempre fuori della G V in essa caderà solamente in R, dopo il gran salto C R. Ed in ultimo finita una intera conversione, il maggior poligono avrà calcate sopra la sua A S sei linee eguali al suo perimetro senza veruna interposizione, il poligono minore avrà parimente impresse sei linee eguali all' ambito suo, ma discontinuate dall' interposizione di cinque archi, sotto i quali restano le corde, parti della parallela H T non tocche dal poligono; e finalmente il centro G non è convenuto mai con la parallela G V, salvo che in sei punti. Di qui potete comprendere, come lo spazio passato dal minor poligono è quasi eguale al passato dal maggiore, cioè la linea H T alla A S, della quale è solamente minore, quanto è la corda d'uno di questi archi, intendendo però la

linea H T insieme con gli spazj dei cinque archi. Ora questo che vi ho esposto e dichiarato nell'esempio di questi esagoni, vorrei che intendeste accadere di tutti gli altri poligoni, di quanti lati esser si vogliano, purchè sieno simili, concentrici e congiunti; e che alla conversion del maggiore s'intenda rigirarsi anco l'altro quanto si voglia minore; che intendeste, dico, le linee da essi passare prossimamente eguali, computando nello spazio passato dal minore gl'intervalli sotto gli archetti non tocchi da parte veruna del perimetro di esso minor poligono. Passa dunque il gran poligono di mille lati, e misura conseguentemente una linea retta eguale al suo ambito; e nell'istesso tempo il piccolo passa una prossimamente egual linea, ma interrottamente composta di mille particelle eguali a i suoi mille lati coll'interposizione di mille spazj vacui, che tali possiamo chiamargli in relazione alle mille lineette toccate da i lati del poligono. Ed il detto sin qui non ha veruna difficoltà o dubitazione. Ma ditemi, se intorno a un centro, qual sia, v. g. questo punto A, noi descriveremo due cerchi concentrici, ed insieme uniti, e che dai punti C, B dei lor semidiametri sieno tirate le tangenti C E, B F, e ad esse pel centro A la parallela A D, intendendo girato il cerchio maggiore sopra la linea B F (posta eguale alla di lui circonferenza, come parimente le altre

due CE, AD) compita che abbia una revoluzione, che averà fatto il minor cerchio, e che il centro? questo sicuramente averà scorsa e toccata tutta la linea AD, e la circonferenza di quello averà con li suoi toccamenti misurata tutta la CE, facendo l'istesso che fecero i poligoni di sopra: in questo solamente differenti, che la linea HT non fu tocca in tutte le sue parti dal perimetro del minor poligono, ma ne furon lasciate tante intatte coll'interposizione di vacui saltati, quante furon le parti tocche dai lati; ma qui nei cerchi mai non si separa la circonferenza del minor cerchio dalla linea CE, sì che alcuna sua parte non venga tocca, nè mai quello che tocca della circonferenza, è manco del toccato nella retta. Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?

*Sagr.* Andava pensando, se si potesse dire, che siccome il centro del cerchio esso solo strascicato sopra AD la tocca tutta essendo anco un punto solo, così potessero i punti della circonferenza minore tirati dal moto della maggiore andare strascicandosi per qualche particella della linea CE.

*Salv.* Questo non può essere per due ragioni; prima perchè non sarebbe maggior ragione, che alcuno dei toccamenti simili al C andassero strascicando per qual-

che parte della linea C E, ed altri no: e quando questo fusse, essendo tali toccamenti (perchè son punti) infiniti, gli strascichi sopra la C E sarebbero infiniti, ed essendo quanti farebbero una linea infinita, ma la C E è finita. L'altra ragione è, che mutando il cerchio grande nella sua conversione continuamente contatto, non può non mutarlo parimente il minor cerchio, non si potendo da altro punto, che dal punto B tirare una linea retta sino al centro A, e che passasse pel punto C, sicchè mutando contatto la circonferenza grande, lo muta ancora la piccola, nè punto alcuno della piccola tocca più d'un punto della sua retta C E. Oltre che anco nella conversione dei poligoni nessun punto del perimetro del minore si adattava a più d'un punto della linea, che dal medesimo perimetro veniva misurata, come si può facilmente intendere, considerando la linea I K esser parallela alla B C, onde sin che la B C non si schiaccia sopra la B Q, la I K resta sollevata sopra la I P, nè prima la calca, se non nel medesimo istante che la B C si unisce colla B Q, ed allora tutta insieme la I K si unisce colla O P, e poi immediatamente se gli eleva sopra.

*Sagr.* Il negozio è veramente molto intrigato, nè a me sovviene scioglimento alcuno, però diteci quello che a noi conviene.

*Salv.* Io ricorrerei alla considerazione

dei poligoni sopra considerati, l'effetto dei quali è intelligibile, e di già compreso, e direi, che siccome nei poligoni di centomila lati alla linea passata, e misurata dal perimetro del maggiore, cioè, dai centomila suoi lati continuamente distesi, è eguale la misurata dai centomila lati del minore, ma coll' interposizione di centomila spazj vacui traposti; così direi nei cerchi (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata dagl' infiniti lati del cerchio grande, continuamente disposti, esser pareggiata in lunghezza dalla linea passata dagl' infiniti lati del minore, ma da questi coll' interposizione d'altrettanti vacui tra essi; e siccome i lati non son quanti, ma bene infiniti, così gl' interposti vacui non son quanti, ma infiniti, quelli cioè infiniti punti tutti pieni, e questi infiniti punti parte pieni, e parte vacui. E qui voglio, che notiate come risolvendo, e dividendo una linea in parti quante, e per conseguenza numerate, non è possibile disporle in una estensione maggiore di quella che occupava mentre stavano continuate e congiunte, senza l'interposizione d'altrettanti spazj vacui, ma immaginandola risoluta in parti non quante, cioè ne' suoi infiniti indivisibili, la possiamo concepire distratta in immenso senza l'interposizione di spazj quanti vacui, ma sibbene d'infiniti indivisibili vacui. E questo, che si dice delle semplici linee, s'in-

tenderà detto delle superficie de' corpi solidi, considerandogli composti d'infiniti atomi non quanti; mentre gli vorremo dividere in parti quante, non è dubbio che non potremo disporle in ispazj più ampli del primo occupato dal solido, se non coll' interposizione di spazj quanti vacui, vacui dico almeno della materia del solido; ma se intenderemo l'altissima ed ultima resoluzione fatta nei primi componenti non quanti ed infiniti, potremo concepire tali componimenti distratti in ispazio immenso senza l'interposizione di spazj quanti vacui, ma solamente di vacui infiniti non quanti; ed in questa guisa non repugna distrarsi, v. g. un piccolo globetto d'oro in uno spazio grandissimo senza ammettere spazj quanti vacui: tuttavolta però che ammettiamo l'oro esser composto d'infiniti indivisibili.

*Simp.* Parmi che voi camminiate alla via di quei vacui disseminati di certo Filosofo antico.

*Salv.* Ma però voi non soggiugnete: il quale negava la provvidenza divina, come in certo simil proposito assai poco a proposito soggiunse un tale antagonista del nostro Accademico.

*Simp.* Vidi bene, e non senza stomaco, il livore del male affetto contradditore; ma io non solamente per termine di buona creanza non toccherei simili tasti, ma perchè so quanto sono discordi dalla mente ben temperata e bene organiz-

zata di V. S. non solo religiosa e pia, ma cattolica e santa. Ma ritornando sul proposito, molte difficoltà sento nascermi dagli avuti discorsi, dalle quali veramente io non saprei liberarmi. E per una mi si para avanti questa, che se le circonferenze dei due cerchi sono eguali alle due rette C E, B F, questa continuamente presa, e quella coll'interposizione d'infiniti punti vacui, l'A D descritta dal centro, che è un punto solo, in qual maniera si potrà chiamare ad esso eguale contenendone infiniti? In oltre quel comporre la linea di punti, il divisibile di indivisibili, il quanto di non quanti, mi pajono scogli assai duri da passargli: e l'istesso dover ammettere il Vacuo tanto concludentemente riprovato da Aristotile non manca delle medesime difficoltà.

*Salv.* Ci sono veramente coteste, e dell'altre: ma ricordiamoci, che siamo tra gl'infiniti, e gl'indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la lor piccolezza; contuttociò vediamo, che l'umano discorso non vuole rimanersi dall'aggirarsegli attorno, dal che pigliando io ancora qualche libertà produrrei alcuna mia fantasticheria se non concludente necessariamente, almeno per la novità apportatrice di qualche meraviglia: ma forse il divertir tanto lungamente dal cominciato cammino potrebbe parervi importuno, e però poco grato.

*Sagr.* Di grazia godiamo del benefizio, e privilegio, che s' ha dal parlar con i vivi, e tra gli amici, e più di cose arbitrarie, e non necessarie, differente dal trattar co' libri morti, li quali ti eccitano mille dubbj, e nessuno te ne risolvono. Fateci dunque partecipi di quelle considerazioni, che il corso dei nostri ragionamenti vi suggerisce, che non ci mancherà tempo, mercè dell' esser noi disobbligati da funzioni necessarie, di continuare, e risolvere l' altre materie intraprese, ed in particolare i dubbj toccati dal Sig. Simp. non si trapassino in tutti modi.

*Salv.* Così si faccia, poichè tale è il vostro gusto; e cominciando dal primo, che fu, come si possa mai capire, che un sol punto sia eguale ad una linea, vedendo di non ci poter fare altro per ora, proverò di quietare, o almeno temperare una improbabilità con un'altra simile, o maggiore, come talvolta una maraviglia si attutisce con un miracolo. E questo sarà col mostrarvi due superficie eguali, ed insieme due corpi pur eguali, e sopra le medesime dette superficie come basi loro collocati, andarsi continuamente, ed egualmente e queste e quelli nel medesimo tempo diminuendo, restando sempre tra di loro eguali i loro residui, e finalmente andare sì le superficie, come i solidi a terminare le lor perpetue egualità precedenti l' uno dei solidi coll' una delle su-

perficie in una lunghissima linea, e l'altro solido coll'altra superficie in un sol punto, cioè questi in un sol punto, e quelli in infiniti.

*Sagr.* Ammirabil proposta veramente mi par cotesta, però sentiamone l' esplicazione e la dimostrazione.

*Salv.* È necessario farne la figura, perchè la prova è pura Geometrica. Per tanto intendasi il mezzo cerchio A F B (fig. VI.) il cui centro C, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo A D E B, e dal centro ai punti D, E sieno tirate le rette linee C D, C E. Figurandoci poi il semidiametro C F perpendicolare a una delle due A B, D E immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura. È manifesto, che dal rettangolo A D E B verrà descritto un cilindro, dal semicircolo A F B una mezza sfera, e dal triangolo C D E un cono. Inteso questo, voglio, che ci immaginiamo esser levato via l'Emisferio, lasciando però il cono, e quello che rimarrà del cilindro, il quale dalla figura, che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella; della quale, e del cono prima dimostreremo, che sono eguali; e poi un piano tirato parallelo al cerchio, che è base della scodella, il cui diametro è la linea D E, e il centro F, dimostreremo tal piano, che passasse, v. gr. per la linea G N, segando la scodella nei punti G I, O N, ed il

cono ne' punti H L, tagliare la parte del cono C H L eguale sempre alla parte della scodela, il cui profilo ci rappresentano i triangoli G A I, B O N, e di più si proverà la base ancora del medesimo cono, cioè il cerchio, il cui diametro H L, essere eguale a quella circolar superficie, che è base della parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza, quanta è la linea G I. (notate intanto, che cosa sono le diffinizioni dei Matematici, che sono una imposizion di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate, ed introdotte per levar lo stento tedioso, che voi, ed io sentiamo di presente per non aver convenuto insieme di chiamar, v. gr. questa superficie nastro circolare, e quel solido acutissimo della scodella rasojo rotondo) Or comunque vi piaccia chiamargli bastivi intendere, che il piano prodotto per qualsivoglia distanza, pur che sia parallelo alla base, cioè al cerchio, il cui diametro D E taglia sempre i due solidi, cioè la parte del cono C H L, e la superior parte della scodella eguali tra di loro: e parimente le due superficie basi di tali solidi, cioè il detto nastro, e il cerchio H L pur tra loro eguali. Dal che ne segue la maraviglia accennata: cioè, che se intenderemo il segante piano successivamente innalzato verso la linea A B, sempre le parti dei solidi tagliate sono eguali, come anco le superficie, che son basi loro, pur sempre sono

eguali, e finalmente alzando, e alzando tanto li due solidi ( sempre eguali) quanto le loro basi (superficie pur sempre eguali) vanno a terminare l'una coppia di loro in una circonferenza di un cerchio, e l'altra in un sol punto: che tali sono l'orlo supremo della scodella, e la cuspide del cono. Or mentre che nella diminuzione dei due solidi si va sino all'ultimo mantenendo sempre tra essi la egualità, ben par conveniente il dire, che gli altissimi, ed ultimi di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l'uno infinitamente maggior dell'altro: par dunque; che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale a un sol punto. E questo che accade nei solidi, accade parimente nelle superficie basi loro, che esse ancora conservando nella comune diminuzione sempre la egualità vanno in fine ad incontrare nel momento della loro ultima diminuzione, quella per suo termine la circonferenza di un cerchio, e questa un sol punto. Li quali perchè non si debbon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie, e vestigie lasciate da grandezze eguali? E notate appresso, che quando ben fussero tali vasi capaci degl'immensi Emisferi celesti, tanto gli orli loro supremi, e le punte dei contenuti coni, servando sempre tra loro l'egualità, andrebbero a terminare quelli in circonferenze eguali a quelle de' cerchi massimi degli Orbi celesti, e questi in semplici punti. Onde conforme

a quello, che tali specolazioni ne persuadono, anco tutte le circonferenze di cerchi quanto si voglia diseguali, posson chiamarsi tra loro eguali, e ciascheduna eguale a un punto solo.

*Sagr.* La speculazione mi par tanto gentile, e peregrina, che quando ben potessi, non me gli vorrei opporre, che mi parrebbe un mezzo sacrilegio lacerar sì bella struttura calpestandola con qualche pedantesco affronto; però per intera soddisfazione recateci pur la prova, che dite Geometrica del mantenersi sempre l'egualità tra quei solidi, e quelle basi loro, che penso, che non possa esser se non molto arguta, essendo così sottile la filosofica meditazione, che da tal conclusione dipende.

*Salv.* La dimostrazione è anco breve, e facile. Ripigliamo la segnata figura, nella quale per esser l'angolo I P C retto, il quadrato del semidiametro I C è eguale alli due quadrati dei lati I P, P C. Ma il semidiametro I C è eguale alla A C, e questa alla G P, e la C P è eguale alla P H; adunque il quadrato della linea G P è eguale alli due quadrati delle I P, P H, e il quadruplo ai quadrupli; cioè il quadrato del diametro G N è eguale alli due quadrati I O, H L; e perchè i cerchi son tra loro, come i quadrati dei loro diametri, il cerchio, il cui diametro G N sarà eguale alli due cerchi, i cui dia-

metri I O, H L, e tolto via il comune cerchio, il cui diametro I O, il residuo del cerchio G N sarà eguale al cerchio, il cui diametro è H L. E questo è quanto alla prima parte. Quanto poi all' altra parte, lasceremo per ora la dimostrazione, sì perchè volendola noi vedere la troveremo nella duodecima Proposizione del libro secondo *de centro gravitatis solidorum* posta dal Sig. Luca Valerio nuovo Archimede dell' età nostra, il quale per un altro suo proposito se ne servì; sì perchè nel caso nostro basta l' aver veduto, come le superficie già dichiarate sieno sempre eguali; e che diminuendosi sempre egualmente vadano a terminare l' una in un sol punto, e l' altra nella circonferenza di un cerchio maggiore anco di qualsivoglia grandissimo, perchè in questa conseguenza sola versa la nostra maraviglia.

*Sagr.* Ingegnosa la dimostrazione, quanto mirabile la riflessione fattavi sopra. Or sentiamo qualche cosa circa l' altra difficoltà promossa dal Sig. Simp. se però avete alcuna particolarità da dirvi sopra, che crederei, che non potesse essere, essendo una controversia stata tanto esagitata.

*Salv.* Avrò qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel, che poco fa dissi, cioè che l' infinito è per se solo dà noi incomprensibile, come anco gl' indivisibili: or pensate quello, che saranno congiunti insieme: e pur se voglia-

mo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito, e l'indivisibile. Le cose, che in più volte mi son passate per la mente in tal proposito, son molte, parte delle quali e forse le più considerabili potrebbe esser, che così improvvisamente non mi sovvenissero, ma nel progresso del ragionamento potrà accadere, che destando io a voi, ed in particolare al Sig. Simplicio obbiezioni, e difficoltà, essi all'incontro mi facessero ricordar di quello che senza tale eccitamento restasse dormendo nella fantasia; e però colla solita libertà sia lecito produrre in mezzo i nostri umani capricci, che tali meritamente possiamo nominargli in comparazione delle dottrine soprannaturali, sole vere, e sicure determinatrici delle nostre controversie, e scorte inerranti nei nostri oscuri, e dubbj sentieri, o più tosto laberinti.

Tra le prime istanze, che si sogliono produrre contro a quelli, che compongono il continuo d'indivisibili, suole esser quella, che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile; perchè se ciò fosse, ne seguirebbe, che anco l'indivisibile fosse divisibile, perchè quando due indivisibili, come per esempio due punti, congiunti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre,

di cinque, di sette, e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo più segabili in due parti eguali, rendon segabile quell'indivisibile, che nel mezzo era collocato. In questa, ed altre obbiezioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte con dirgli, che non solamente due indivisibili, ma nè dieci, nè cento, nè mille non compongono una grandezza divisibile, e quanta, ma sibbene infiniti.

*Simpl.* Qui nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile; ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tuttavolta che amendue contengano punti infiniti, bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito; perchè la infinità dei punti della linea maggiore eccederà l'infinità dei punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito, mi par concetto da non potere esser capito in verun modo.

*Salv.* Queste son di quelle difficoltà, che derivano dal discorrer, che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quegli attributi, che noi diamo alle cose finite, e terminate; il che penso, che sia inconveniente, perchè stimo, che questi attributi di maggioranza, minorità, ed egualità non convengano agl'infiniti, dei quali non si può dire uno esser maggiore, o minore, o eguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un

sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio che ha mossa la difficoltà.

Io suppongo, che voi benissimo sappiate, quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.

*Simpl.* So benissimo, che il numero quadrato è quello, che nasce dalla moltiplicazione di un altro numero in se medesimo, e così il quattro, il nove son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre in se medesimi moltiplicati.

*Salv.* Benissimo; e sapete ancora, che siccome i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli, che si multiplicano, si chiamano lati, o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati, e i non quadrati esser più, che i quadrati soli, dirò proposizione verissima; non è così?

*Simpl.* Non si può dir altrimenti.

*Salv* Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti, quante sono le proprie radici, avvengachè ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice ha il suo quadrato, nè quadrato alcuno ha più di una sola radice, nè radice alcuna più di un quadrato solo.

*Simp.* Così sta.

*Salv.* Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare, che elle non siano quante tutti i numeri, poichè non vi è numero alcuno, che non sia radice di qualche quadrato. E stante questo converrà dire, che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poichè tanti sono, quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più, che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine dei quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggiori numeri si trapassa; perchè sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto a dire, la decima parte esser quadrati: in dieci mila solo la centesima parte son quadrati, in un milione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepire potessimo, bisognerebbe dire tanti essere i quadrati, quanti tutti i numeri insieme.

*Sagr.* Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

*Salv.* Io non vedo, che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici; nè la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggior di quella; ed in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore, e minore

non aver luogo negl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Signor Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere, che nelle maggiori non siano più punti, che nelle minori, io gli rispondo, che non ve ne sono nè più, nè manco, nè altrettanti; ma in ciascheduna infiniti. O veramente se io gli rispondessi i punti nell' una esser quanti sono i numeri quadrati; in un' altra maggiore, quanti tutti i numeri; in quella piccolina, quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato soddisfazione col porre più in una, che nell' altra, e pure in ciascheduna infiniti? e questo è quanto alla prima difficoltà.

*Sagr.* Fermate in grazia, e concedetemi, che io aggiunga al detto fin qui un pensiero, che pur ora mi giugne; e questo è, che stante le cose dette sin qui parmi, che non solamente non si possa dire un infinito esser maggiore a un altro infinito, ma nè anco, che ei sia maggior di un finito, perchè se il numero infinito fosse maggiore, v. gr. del milione, ne seguirebbe, che passando dal milione ad altri ed altri continuamente maggiori, si camminasse verso l' infinito; il che non è: anzi per l' opposito a quanto maggiori numeri facciamo passaggio, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; perchè nei numeri, quanto più si pigliano grandi, sempre più e più rari sono i nu-

meri quadrati in essi contenuti: ma nel numero infinito i quadrati non possono esser manco, che tutti i numeri, come pure ora si è concluso: adunque l'andare verso numeri sempre maggiori e maggiori è un discostarsi dal numero infinito.

*Salv.* E così dal vostro ingegnoso discorso si conclude gli attributi di maggiore, minore, o eguale non aver luogo non solamente tra gl' infiniti, ma nè anco tra gl' infiniti, e i finiti.

Passo ora ad un'altra considerazione, ed è, che stante che la linea, ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non vedo come si possa sfuggire, la composizione essere d'infiniti indivisibili, perchè una divisione, e suddivisione, che si possa proseguir perpetuamente, suppone, che le parti sieno infinite, perchè altramente la suddivisione sarebbe terminabile; e l'esser le parti infinite si tira in conseguenza l'esser non quante; perchè quanti infiniti fanno un' estensione infinita; e così abbiamo il continuo composto d' infiniti indivisibili.

*Simpl.* Ma se noi possiamo proseguir sempre la divisione in parti quante, che necessità abbiamo noi di dover per tal rispetto introdur le non quante?

*Salv.* L'istesso poter proseguir perpetuamente la divisione in parti quante, induce la necessità della composizione d' infiniti non quanti. Imperocchè venendo più

alle strette io vi domando, che risolutamente mi diciate, se le parti quante nel continuo per vostro credere son finite, o infinite?

*Simpl.* Io vi rispondo esser infinite, e finite: infinite in potenza, e finite in atto. Infinite in potenza, cioè innanzi alla divisione; ma finite in atto, cioè dopo che son divise, perchè le parti non s'intendono attualmente esser nel suo tutto, se non dopo esser divise, o almeno segnate; altramente si dicono esservi in potenza.

*Salv.* Sicchè una linea lunga, v. g. venti palmi, non si dice contener venti linee di un palmo l'una attualmente, se non dopo la divisione in venti parti eguali, ma per avanti si dice contenerle solamente in potenza. Or sia come vi piace, ditemi, se fatta l'attual divisione di tali parti quel primo tutto cresce, o diminuisce, o pur resta della medesima grandezza?

*Simpl.* Non cresce, nè scema.

*Salv.* Così credo io ancora. Adunque le parti quante nel continuo o vi sieno in atto, o vi sieno in potenza, non fanno la sua quantità maggiore, nè minore; ma chiara cosa è, che parti quante attualmente contenute nel loro tutto, se son infinite, lo fanno di grandezza infinita; adunque parti quante benchè in potenza solamente infinite, non possono esser contenute, se non in una grandezza infinita; adunque nella finita parti quante infinite

nè in atto, nè in potenza possono esser contenute.

*Sagr.* Come dunque potrà esser vero, che il continuo possa incessabilmente dividersi in parti capaci sempre di nuova divisione?

*Salv.* Par che quella distinzione d'atto, e di potenza vi renda fattibile per un verso quel, che per un altro sarebbe impossibile. Ma io vedrò d'aggiustar meglio queste partite con fare un altro computo. Ed al quesito, che domanda, se le parti quante nel continuo terminato sien finite, o infinite, risponderò tutto l'opposito di quel, che rispose dianzi il Sig. Simplicio, cioè non esser nè finite, nè infinite.

*Simp.* Ciò non avrei saputo mai rispondere io, non pensando, che si trovasse termine alcuno mezzano tra il finito, e l'infinito; sicchè la divisione, o distinzione, che pone una cosa o esser finita, o infinita, fosse manchevole e difettosa.

*Salv.* A me par, ch'ella sia. E parlando delle quantità discrete, parmi che tra le finite, e l'infinite vi sia un terzo medio termine, che è il rispondere ad ogni segnato numero; sicchè domandato nel presente proposito, se le parti quante nel continuo sieno finite, o infinite, la più congrua risposta sia il dire non essere nè finite, nè infinite, ma tante, che rispondono ad ogni segnato numero; per

lo che fare è necessario, che elle non sieno comprese dentro a un limitato numero, perchè non risponderebbono ad un maggiore: ma nè anco è necessario, che elle sieno infinite, perchè niuno assegnato numero è infinito. E così ad arbitrio del domandante una proposta linea gliela potremo assegnare in cento parti quante, e in mille, e in cento mila, conforme a qual numero gli piacerà; ma divisa in infinite, questo non già. Concedo dunque ai Signori Filosofi, che il continuo contiene quante parti quante piace loro, e gli ammetto, che le contenga in atto, o in potenza a lor gusto, e beneplacito; ma gli soggiungo poi, che nel modo che in una linea di dieci canne si contengono dieci linee d'una canna l'una, e quaranta d'un braccio l'una, e ottanta di mezzo braccio, così contiene ella punti infiniti; chiamategli poi in atto, o in potenza, come più vi piace, che io, Sig. Simplicio, in questo particolare mi rimetto al vostro arbitrio, e giudizio.

*Simp.* Io non posso non laudare il vostro discorso: ma ho gran paura, che questa parità dell'esser contenuti i punti, come le parti quante, non corra con intera puntualità; nè che a voi sarà così agevole il dividere la proposta linea in infiniti punti, come a quei Filosofi in dieci canne, o in quaranta braccia: anzi ho per impossibile del tutto il ridurre ad ef-

fetto tal divisione; sicchè questa sarà una di quelle potenze, che mai non si riducono in atto.

*Salv.* Il non essere una cosa fattibile, se non con fatica, o diligenza, o in gran lunghezza di tempo, non la rende impossibile, perchè penso, che voi altresì non così agevolmente vi sbrigherete da una divisione da farsi d'una linea in mille parti, e molto meno dovendo dividerla in 937 o altro gran numero primo. Ma se questa, che voi per avventura stimate divisione impossibile, io ve la riducessi a così spedita, come se altri la dovesse segare in quaranta, vi contentereste voi di ammetterla più placidamente nella nostra conversazione?

*Simp.* Io gusto del vostro trattar, come fate talora, con qualche piacevolezza; ed al quesito vi rispondo, che la facilità mi parrebbe grande più che a bastanza, quando il risolverla in punti non fosse più laborioso, che il dividerla in mille parti.

*Salv.* Qui voglio dirvi cosa, che forse vi farà maravigliare in proposito del volere, o poter risolver la linea ne' suoi infiniti, tenendo quell' ordine, che altri tiene nel dividerla in quaranta, sessanta, o cento parti, cioè coll' andarla dividendo in due, e poi in quattro, col qual ordine chi credesse di trovare i suoi infiniti punti, s' ingannerebbe indigrosso, perchè con tal progresso nè men alla division di

tutte le parti quante si perverrebbe in eterno; ma degli indivisibili tanto è lontano il poter giugner per cotale strada al cercato termine, che più tosto altri se ne discosta, e mentre pensa col continuar la divisione, e col moltiplicar la moltitudine delle parti, di avvicinarsi alla infinità, credo, che sempre più se n'allontani: e la mia ragione è questa. Nel discorso avuto poco fa concludemmo, che nel numero infinito bisognava, che tanti fossero i quadrati, o i cubi, quanti tutt' i numeri, poichè e questi, e quelli tanti sono, quante le radici loro, e radici son tutt' i numeri. Vedemmo appresso, che quanto maggiori numeri si pigliavano, tanto più radi si trovavano in essi i lor quadrati, e più radi ancora i lor cubi: adunque è manifesto, che a quanto maggiori numeri noi trapassiamo, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; dal che ne seguita, che tornando indietro (poichè tal progresso sempre più ci allontana dal termine ricercato) se numero alcuno può dirsi infinito, questo sia l' unità. E veramente in essa son quelle condizioni, e necessarj requisiti del numero infinito, dico, del contener in se tanti quadrati, quanti cubi, e quanti tutti i numeri.

*Simp.* Io non capisco bene, come si debba intendere questo negozio.

*Salv.* Il negozio non ha in se dubbio veruno, perchè l' unità è quadrato, è

cubo, è quadrato quadrato, e tutte le altre dignità; nè vi è particolarità veruna essenziale ai quadrati, ai cubi, che non convenga all'uno; come, v. g. proprietà di due numeri quadrati è l'aver tra di loro un numero medio proporzionale. Pigliate qualsivoglia numero quadrato per l'uno de' termini, e per l'altro l'unità, sempre ci troverete un numero medio proporzionale. Sieno due numeri quadrati 9 e 4 eccovi tra 'l 9 e l'uno, medio proporzionale il 3, fra 'l 4 e l'uno media il 2, e tra i due quadrati 9 e 4 vi è il 6 in mezzo. Proprietà dei cubi è l'esser tra essi necessariamente due numeri medi proporzionali. Ponete 8 e 27, già tra loro son medi 12 e 18, e tra l'uno, e l'8 mediano il 2 e 'l 4, tra l'uno e 'l 27 il 3 e 'l 9. Concludiamo per tanto non ci esser altro numero infinito, che l'unità. E queste sono delle maraviglie, che superano la capacità della nostra immaginazione, e che doveriano farci accorti, quanto gravemente si erri, mentre altri voglia discorrere intorno agl' infiniti con quei medesimi attributi, che noi usiamo intorno ai finiti, le nature dei quali non hanno veruna convenienza tra di loro. In proposito di che non voglio tacervi un mirabile accidente, che pur ora mi sovviene, esplicante l'infinita differenza, anzi repugnanza, e contrarietà di natura, che incontrerebbe una quantità terminata nel trapassa-

re all'infinita. Segniamo questa linea retta A B ( Fig. VII. ) di qualsivoglia lunghezza; e preso in lei qualsivoglia punto C, che in parti diseguali la divida: dico, che partendosi coppie di linee dai termini A, B, che ritenendo fra di loro la medesima proporzione, che hanno le parti A C, B C, vadano a concorrere insieme i punti dei loro concorsi andranno tutti nella circonferenza di un medesimo cerchio: come per esempio partendosi le A L, B L dai punti A, B, ed avendo tra di loro la medesima proporzione, che hanno le parti A C, B C, e andando a concorrere nel punto L, e ritenendo l'istessa proporzione altre due A K, B K, concorrendo in K altre, A I, B I, A H, H B, A G, G B, A F, F B, A E, E B, dico, che i punti dei concorsi C, L, K, I, H, G, F, E cascano tutti nella circonferenza di un istesso cerchio, talchè se ci immagineremo il punto C muoversi continuamente con tal legge, che le linee da esso prodotte sino ai termini fissi A B mantengano sempre la proporzione medesima, che hanno le prime parti A C, C B, tal punto C descriverà la circonferenza di un cerchio, come appresso vi dimostrerò. Ed il cerchio in cotal modo descritto sarà sempre maggiore e maggiore infinitamente, secondo che il punto C sarà preso più vicino al punto di mezzo, che sia O, e minore sarà quel cerchio, che dal punto più vicino

all' estremità B sarà descritto; in maniera che dai punti infiniti, che pigliar si possono nella linea O B, si descriveranno cerchi (movendogli coll' esplicata legge) di qualsivoglia grandezza, minori della luce dell' occhio di una pulce, e maggiori dell' Equinoziale del primo Mobile. Ora se alzandosi qualsivoglia dei punti compresi tra i termini O, B da tutti si descrivono cerchi, e immensi dai punti prossimi all'O, alzando l'istesso O, e continuando di muoverlo coll' osservanza dell' istesso decreto, cioè, che le linee da esso prodotte sino ai termini A, B ritengano la proporzione, che hanno le prime linee A O, O B, che linea verrà segnata? Segnerassi la circonferenza di un cerchio, ma di un cerchio maggiore di tutti gli altri massimi, di un cerchio dunque infinito; ma si segna anco una linea retta, e perpendicolare sopra la B A eretta dal punto O, e prodotta in infinito senza mai tornare a riunire il suo termine ultimo col suo primo, come ben tornavano l' altre; imperocchè la segnata per lo moto limitato del punto C dopo segnato il mezzo cerchio superiore C H E, continuava di segnare l' inferiore E M C riunendo insieme i suoi estremi termini nel punto C. Ma il punto O mossosi per segnar, come tutti gli altri della linea A B (perchè i punti presi nell'altra parte O A descriveranno essi ancora lor cerchi, ed i massimi i punti prossimi

all' O) il suo cerchio per farlo massimo di tutti, e per conseguenza infinito, non può più ritornare nel suo primo termine, ed in somma descrive una linea retta infinita per circonferenza del suo infinito cerchio. Considerate ora qual differenza sia da un cerchio finito a un infinito, poichè questo muta talmente l'essere, che totalmente perde l'essere, e il potere essere; che già ben chiaramente comprendiamo non si poter dare un cerchio infinito; il che si tira poi in conseguenza nè meno potere essere una sfera infinita, nè altro qualsivoglia corpo, o superficie figurata, e infinita. Or che diremo di cotali metamorfosi nel passar dal finito all'infinito? E perchè dobbiamo sentir repugnanza maggiore, mentre cercando l'infinito nei numeri andiamo a concluderlo nell'uno? E mentre che rompendo un solido in molte parti, e seguitando di ridurlo in minutissima polvere, risoluto che si fosse negl' infiniti suoi atomi non più divisibili, perchè non potremo dire quello esser ritornato in un sol continuo, ma forse fluido, come l'acqua, o il mercurio, o il medesimo metallo liquefatto? E non vediamo noi le pietre liquefarsi in vetro, ed il vetro medesimo col molto fuoco farsi fluido più che l'acqua?

*Sagr.* Dobbiamo dunque credere, i fluidi esser tali, perchè sono risoluti nei primi infiniti indivisibili suoi componenti?

*Salv.* Io non so trovar miglior ripiego per risolvere alcune sensate apparenze, tra le quali una è questa. Mentre io piglio un corpo duro, ossia pietra, o metallo, e che con un martello, o sottilissima lima lo vo al possibile dividendo in minutissima, ed impalpabile polvere, chiara cosa è, che i suoi minimi, ancorchè per la lor piccolezza sieno impercettibili a uno a uno dalla nostra vista, e dal tatto: tuttavia sono eglino ancor quanti, figurati, e numerabili; e di essi accade, che accumulati insieme si sostengono ammucchiati; e scavati sino a certo segno, resta la cavità, senza che le parti d' intorno scorrano a riempirla; agitati, e commossi subito si fermano, tantosto che il motore esterno gli abbandona. E questi medesimi effetti fanno ancora tutti gli aggregati di corpusculi maggiori e maggiori, e di ogni figura, ancorchè sferica, come vediamo nei monti di miglio, di grano, di migliarole di piombo, e di ogni altra materia. Ma se noi tenteremo di vedere tali accidenti nell'acqua, nessuno ve ne troveremo, ma sollevata immediatamente si spiana, se da vaso, o altro esterno ritegno non sia sostenuta; incavata subito scorre a riempier la cavità, ed agitata per lunghissimo tempo va fluttuando, e per ispazj grandissimi distendendo le sue onde. Da questo mi par di potere molto ragionevolmente arguire, i minimi dell'acqua,

nei quali ella pur sembra esser risoluta (poichè ha minor consistenza di qualsivoglia sottilissima polvere, anzi non ha consistenza nessuna) esser differentissimi dai minimi quanti, e divisibili; nè saprei ritrovarvi altra differenza, che l' essere indivisibili. Parmi anco, che la sua esquisitissima trasparenza ce ne porga assai ferma conghiettura; perchè se noi piglieremo del più trasparente cristallo che sia, e lo comincieremo a rompere, e pestare, ridotto in polvere perde la trasparenza, e sempre più, quanto più sottilmente si trita; ma l'acqua, che pur è sommamente trita, è anco sommamente diafana. L'oro, e l'argento con acque forti polverizzati più sottilmente, che con qualsivoglia lima, pur restano in polvere, ma non divengon fluidi: nè prima si liquefanno, che gl'indivisibili del fuoco, o dei raggi del Sole gli dissolvano, credo, nei loro primi altissimi componenti infiniti, indivisibili.

*Salv.* Questo, che V. S. ha toccato della luce, ho io più volte veduto con maraviglia, veduto dico, con uno specchio concavo di tre palmi di diametro liquefare il piombo in un istante; onde io son venuto in opinione, che quando lo specchio fosse grandissimo, e ben terso, e di figura parabolica, liquefarebbe non meno ogni altro metallo in brevissimo tempo, vedendo, che quello nè molto grande, nè ben lustro, e di cavità sferica

con tanta forza liquefaceva il piombo, ed abbruciava ogni materia combustibile: effetti, che mi rendon credibili le maraviglie degli specchi di Archimede.

*Salv.* Intorno agli effetti degli specchi di Archimede mi rende credibile ogni miracolo, che si legge in più Scrittori, la lettura dei libri dell'istesso Archimede già da me con infinito stupore letti, e studiati: e se nulla di dubbio mi fosse restato, quello, che ultimamente ha dato in luce intorno allo Specchio Ustorio il P. Bonaventura Cavaleri, e che io con ammirazione ho letto, è bastato a levarmi ogni difficoltà.

*Sagr.* Vidi ancor io cotesto trattato, e con gusto, e maraviglia grande lo lessi, e perchè per avanti aveva conoscenza della persona, mi andai confermando nel concetto, che di esso aveva già preso, che ei fosse per riuscire uno de' principali Matematici dell' età nostra. Ma tornando all' effetto maraviglioso dei raggi Solari nel liquefare i metalli, dobbiamo noi credere, che tale, e sì veemente operazione sia senza moto, o pur che sia col moto, ma velocissimo?

*Salv.* Gli altri incendj, e dissoluzioni veggiamo noi farsi con moto, e con moto velocissimo. Vedansi le operazioni dei fulmini, della polvere nelle mine, e nei petardi, ed in somma quanto il velocitar coi mantici la fiamma dei carboni,

mista con i vapori grossi, e non puri, accresca di forza nel liquefare i metalli: onde io non saprei intendere, che l'azione della luce, benchè purissima potesse esser senza moto, ed anco velocissimo.

*Sagr.* Ma quale, e quanta dobbiamo noi stimare, che sia questa velocità del lume? forse istantanea, momentanea, o pur come gli altri movimenti temporanea? ne potremo con esperienza assicurare quale ella sia?

*Simp.* Mostra l'esperienza quotidiana l'espansion del lume esser istantanea; mentre che vedendo in gran lontananza sparar un' Artiglieria, lo splendor della fiamma senza interposizion di tempo si conduce agli occhi nostri, ma non già il suono all'orecchie, se non dopo notabile intervallo di tempo.

*Sagr.* Eh Sig. Simplicio, da cotesta notissima esperienza non si raccoglie altro, se non che il suono si conduce al nostro udito in tempo men breve di quello, che si conduca il lume; ma non mi assicura, se la venuta del lume sia perciò istantanea più che temporanea, ma velocissima. Nè simile osservazione conclude più, che l'altra di chi dice: subito giunto il Sole all' orizzonte arriva il suo splendore agli occhi nostri; imperocchè chi mi assicura, che prima non giugnessero i suoi raggi al detto termine, che alla nostra vista?

*Salv.* La poca concludenza di queste, e di altre simili osservazioni mi fece una volta pensare a qualche modo di poterci senza errore accertare, se l'illuminazione, cioè se l' espansion del lume fosse veramente istantanea: poichè il moto assai veloce del suono ci assicura, quella della luce non poter esser se non velocissima. E l' esperienza, che mi sovvenne, fu tale. Voglio, che due piglino un lume per uno, il quale tenendolo dentro lanterna, o altro ricetto, possano andar coprendo, e scoprendo coll' interposizion della mano alla vista del compagno; e che ponendosi l' uno incontro all' altro in distanza di poche braccia vadano addestrandosi nello scoprire, ed occultare il lor lume alla vista del compagno: sicchè quando l' uno vede il lume dell' altro, immediatamente scuopra il suo; la qual corrispondenza dopo alcune risposte fattesi scambievolmente verrà loro talmente aggiustata, che senza sensibile svario alla scoperta dell' uno risponderà immediatamente la scoperta dell' altro, sicchè quando l' uno scuopre il suo lume, vedrà nell' istesso tempo comparire alla sua vista il lume dell' altro. Aggiustata cotal pratica in questa piccolissima distanza pongansi i due medesimi compagni con due simili lumi in lontananza di due, o tre miglia; e tornando di notte a far l' istessa esperienza, vadano osservando attentamente, se le risposte delle loro sco-

perte, e occultazioni seguono secondo l'istesso tenore, che facevano da vicino; che seguendo si potrà assai sicuramente concludere, l'espansion del lume essere instantanea; che quando ella ricercasse tempo, in una lontananza di tre miglia, che importano sei, per l'andata d'un lume, e venuta dall'altro, la dimora dovrebbe essere assai osservabile. E quando si volesse far tale osservazione in distanze maggiori, cioe di otto o dieci miglia, potremo servirci del Telescopio, aggiustandone uno per uno gli osservatori al luogo, dove la notte si hanno a mettere in pratica i lumi, li quali ancorchè non molto grandi, e perciò invisibili in tanta lontananza all' occhio libero, ma ben facili a coprirsi, e scoprirsi, coll'ajuto dei Telescopj già aggiustati, e fermati potranno essere comodamente veduti.

*Sagr.* L'esperienza mi pare d'invenzion non men sicura che ingegnosa, ma diteci quello che nel praticarla avete concluso.

*Salv.* Veramente non l'ho sperimentata, salvo che in lontananza piccola, cioè manco d'un miglio, dal che non ho potuto assicurarmi se veramente la comparsa del lume opposto sia istantanea; ma ben, se non instantanea, velocissima, e direi momentanea è ella, e per ora l'assimiglierei a quel moto che vediamo farsi dallo splendore del baleno veduto tra le nugole lontane otto o dieci miglia, del qual lume

distinguiamo il principio, e dirò il capo e fonte in un luogo particolare tra esse nugole; ma ben immediatamente segue la sua espansione amplissima per le altre circostanti, che mi pare argomento quella farsi con qualche poco di tempo; perchè quando l'illuminazione fusse fatta tutta insieme e non per parti, non par che si potesse distinguere la sua origine, e dirò il suo centro dalle sue falde e dilatazioni estreme. Ma in quai pelaghi ci andiamo noi inavvertentemente pian piano ingolfando? tra i vacui, tra gl'infiniti, tra gli indivisibili, tra i movimenti instantanei, per non poter mai dopo mille discorsi giugnere a riva?

*Sagr.* Cose veramente molto sproporzionate al nostro intendimento. Ecco l'infinito cercato tra i numeri, par che vada a terminar nell'unità: dagl'indivisibili nasce il sempre divisibile: il vacuo non par che risegga se non indivisibilmente mescolato tra 'l pieno; ed in somma in queste cose si muta talmente la natura delle comunemente intese da noi, che sin alla circonferenza d'un cerchio diventa una linea retta infinita, che s'io ho ben tenuto a memoria, è quella Proposizione, che voi Sig. Salv. dovevate con geometrica dimostrazione far manifesta. Però quando vi piaccia, sarà bene senza più digredire arrecarcela.

*Salv.* Eccomi a servirle, dimostrando

per piena intelligenza il seguente Problema: Data una linea retta divisa secondo qualsivoglia proporzione in parti disegnali, descrivere un cerchio, alla cui circonferenza, prodotte a qualsivoglia punto di essa due linee rette dai termini della data linea ritengano la proporzion medesima che hanno tra di loro le parti di essa linea data; sicchè omologhe siano quelle che si partano dai medesimi termini.

Sia la data retta linea A B, divisa in qualsivoglia modo in parti diseguali nel punto C, bisogna descrivere il cerchio, a qualsivoglia punto della cui circonferenza concorrendo due rette prodotte dai termini A, B, abbiano tra di loro la proporzion medesima che hanno tra di loro le parti A C, B C (Fig. VIII.), sicchè omologhe sian quelle che si partono dall' istesso termine. Sopra 'l centro C coll' intervallo della minor parte C B intendasi descritto un cerchio, alla circonferenza del quale venga tangente dal punto A la retta A D indeterminatamente prolungata verso E, e sia il contatto in D, e congiungasi la C D, che sarà perpendicolare alla A E, ed alla B A sia perpendicolare la B E, la quale prodotta concorrerà colla A E, essendo l'angolo A acuto: sia il concorso in E, di dove si ecciti la perpendicolare alla A E, che prodotta vada a concorrere con la A B infinitamente prolungata in F. Dico primieramente le due rette F E, F C esser

eguali; imperocchè tirata la E C, avremo nei due triangoli D E C, B E C li due lati dell' uno D E, E C eguali alli due dell' altro B E, E C, essendo le due D E, E B tangenti del cerchio D B, e le basi D C, C B parimente eguali: onde li due angoli D E C, B E C saranno eguali. E perchè all' angolo B C E per esser retto manca quanto è l'angolo C E B, ed all' angolo C E F pur per esser retto manca quanto è l'angolo C E D, essendo tali mancamenti eguali C, gli angoli F E, F E C saranno eguali, ed in conseguenza i lati F E, F C; onde fatto centro il punto F, e coll' intervallo F E descrivendo un cerchio passerà pel punto C. Descrivasi, e sia C E G. Dico questo essere il cerchio ricercato, a qualsivoglia punto della circonferenza del quale ogni coppia di linee che vi concorrano, partendosi dai termini, A, B, avranno la medesima proporzione tra di loro, che hanno le due parti A C, B C, le quali di già vi concorrono nel punto C. Questo delle due che concorrono nel punto E, cioè delle A E, B E, è manifesto; essendo l'angolo E del triangolo A E B diviso in mezzo dalla C E, per lo che qual proporzione ha la A C alla C B, tale ha la A E alla B E. L' istesso proveremo delle due A G, B G terminate nel punto G. Imperocchè essendo (per la similitudine de' triangoli A F E, E F B) come A F ad F E, così E F ad F B, cioè come A F ad F C, così C F ad F B,

sarà dividendo come A C, C F ( cioè ad F G ) così C B a B F, e tutta A B a tutta B G, come una C B ad una B F; e componendo come A G a G B, così C F ad F B, cioè E F ad F B, cioè A E ad E B, ed A C a C B, il che bisognava provare. Prendasi ora qualsivoglia altro punto nella circonferenza, e sia H al quale concorrano le due A H, B H. Dico parimente come A C a C B, così essere A H ad H B. Prolunghisi H B sino alla circonferenza in I, e congiungasi I F. E perchè già si è visto come A B a B G, così essere C B a B F, sarà il rettangolo A B F eguale al rettangolo C B G, e sono gli angoli al B eguali, adunque A H ad H B sta, come I F, cioè E F ad F B ed A E ad E B.

Dico oltre a ciò, che è impossibile, che le linee che abbiano tal proporzione partendosi dai termini A, B, concorrano a verun punto, o dentro, o fuori del cerchio C E G. Imperocchè, se è possibile, concorrano due tali linee al punto L posto fuori, e siano le A L, B L, e prolunghisi la L B sino alla circonferenza in M, e congiungasi M F. Se dunque la A L alla B L è come la A C alla B C, cioè come la M F alla F B, avremo due triangoli A L B, M F B, li quali intorno alli due angoli A L B, M F B hanno i lati proporzionali, gli angoli alla cima nel punto B eguali, e li due rimanenti F M B, L A B minori che retti. ( Imperocchè l'angolo

retto al punto M ha per base tutto il diametro C G, e non la sola parte B F, e l'altro al punto A è acuto, perchè la linea A L omologa della A C è maggiore della B L omologa della B C). Adunque i triangoli A B L, M B F son simili: e però come A B a B L, così M B a B F, onde il rettangolo A B F sarà eguale al rettangolo M B L; ma il rettangolo A B F s'è dimostrato eguale al C B G; adunque il rettangolo M B L è eguale al rettangolo C B G, il che è impossibile; adunque il concorso non può cader fuor del cerchio. E nel medesimo modo si dimostrerà non poter cader dentro; adunque tutt'i concorsi cascano nella circonferenza stessa.

Ma è tempo che torniamo a dar soddisfazione al desiderio del Sig. Simplicio, mostrandogli come il risolver la linea nei suoi infiniti punti non è non solamente impossibile, ma nè meno ha in se maggior difficoltà, che 'l distinguere le sue parti quante, fatto però un supposto, il quale penso, Sig. Simpl. che non siate per negarmi; e questo è, che non mi ricercherete, che io vi separi i punti l'uno dall'altro, e ve gli faccia veder a uno a uno distinti sopra questa carta; perchè io ancora mi contenterei, che senza staccar l'una dall'altra le quattro o le sei parti d'una linea, mi mostraste le sue divisioni segnate, o al più piegate ad angoli, formandone un quadrato o un esagono; perchè

mi persuado pure, che allora le chiamereste abbastanza distinte e attuate.

*Simpl.* Veramente sì.

*Salv.* Ora se l'inflettere una linea ad angoli, formandone ora un quadrato, ora un ottangolo, ora un poligono di quaranta, di cento o di mille angoli, è mutazione bastante a ridurre all'atto quelle quattro, otto, quaranta, cento e mille parti, che prima nella linea diritta erano per vostro detto in potenza, quando io formi di lei un poligono di lati infiniti, cioè quando io la inflettta nella circonferenza d'un cerchio, non potrò io con pari licenza dire d'aver ridotto all'atto quelle parti infinite, che voi prima, mentre era retta, dicevate esser in lei contenute in potenza? nè si può negare tal risoluzione esser fatta ne' suoi infiniti punti non meno, che quella nelle sue quattro parti nel formarne un quadrato, o nelle sue mille nel formarne un millagono; imperocchè in lei non manca veruna delle condizioni che si trovano nel poligono di mille, e di cento mila lati. Questo applicato a una linea retta se gli posa sopra toccandola con uno de' suoi lati, cioè con una sua millesima parte; il cerchio, che è un poligono di lati infiniti, tocca la medesima retta con uno de' suoi lati, che è un sol punto diverso da tutti i suoi collaterali, e perciò da quelli diviso e distinto non meno, che un lato del poligono dai suoi conterminali. E come il poligono rivoltato sopra un piano stampa

con i toccamenti conseguenti de' suoi lati una linea retta eguale al suo perimetro; così il cerchio girato sopra un tal piano descrive con gl' infiniti suoi successivi contatti una linea retta eguale alla propria circonferenza. Non so adesso, Sig. Simp. se i Signori Peripatetici, ai quali io ammetto, come verissimo concetto, il continuo esser divisibile in sempre divisibili, sicchè continuando una tal divisione e suddivisione, mai non si perverrebbe alla fine, si contenteranno di concedere a me niuna delle tali loro divisioni esser l'ultima, come veramente non è, poichè sempre ve ne resta un' altra; ma bene l'ultima e altissima esser quella che lo risolve in infiniti indivisibili, alla quale concedo, che non si perverrebbe mai dividendo successivamente in maggiore e maggior moltitudine di parti; ma servendosi della maniera che propongo io di distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo (artifizio che non mi dovrebbe esser negato) crederei che dovessero quietarsi, ed ammetter questa composizione del continuo di atomi assolutamente indivisibili. E massime essendo questa una strada forse più d' ogni altra corrente per trarci fuori di molto intrigati laberinti, quali sono, oltre a quello già toccato della coerenza delle parti dei solidi, il comprender come stia il negozio della rarefazione e della condensazione, senza incorrer per causa di quella nell'in-

conveniente di dovere ammettere spazj vacui, e per questa la penetrazione dei corpi: inconvenienti, che ambedue mi pare che assai destramente vengano schivati coll'ammetter detta composizione d'indivisibili.

*Simp*. Io non so quello che i Peripatetici fusser per dire, atteso che le considerazioni fatte da voi credo che gli giugnerebbero per la maggior parte nuove, e come tali converrebbe esaminarle; e potrebbe accadere, che quegli vi ritrovassero risposte e soluzioni potenti a sciorre quei nodi che io per la brevità del tempo, e per la debolezza del mio ingegno non saprei di presente risolvere. Però sospendendo per ora questa parte sentirei ben volentieri come l'introduzione di questi indivisibili faciliti l'intelligenza della condensazione e della rarefazione, schivando nell'istesso tempo il vacuo e la penetrazione dei corpi.

*Sagr*. Sentirò io ancora con gran brama la medesima cosa all'intelletto mio tanto oscura, con questo però che io non rimanga defraudato di sentire, conforme a quello che poco fa disse il Sig. Simpl. le ragioni d'Aristotile in confutazion del vacuo, ed in conseguenza le soluzioni che voi gli arrecate, come convien fare, mentre voi ammettete quello che esso nega.

*Salv*. Faremo l'uno, e l'altro. E quanto al primo è necessario, che sicco-

me in grazia della rarefazione ci serviamo della linea descritta dal minor cerchio magiore della propria circonferenza, mentre vien mosso alla rivoluzione del maggiore, così per intelligenza della condensazione mostriamo, come alla conversione fatta dal minor cerchio, il maggiore descriva una linea retta minore della sua circonferenza; per la cui più chiara esplicazione porremo innanzi la considerazioue di quello, che accade nei poligoni. In una descrizione simile a quell' altra siano due esagoni circa il comune centro L (Fig. IX.) che siano questi A B G, H I K colle linee parallele H O M, A B C, sopra le quali si abbiano a far le revoluzioni; e fermato l'angolo I del poligono minore volgasi esso poligono sin che il lato I K caschi sopra la parallela, nel qual moto il punto K descriverà l'arco K M, e 'l lato K I si unirà colla parte I M. Tra tanto bisogna vedere quel, che farà il lato G B del Poligono maggiore. E perchè il rivolgimento si fa sopra il punto I, la linea I B col termine suo B discriverà tornando in dietro l'arco B b sotto alla parallela C A, tal che quando il lato K I si congiugnerà colla linea M I, il lato B G si unirà colla linea b C, coll' avanzarsi per l' innanzi solamente, quanto è la parte B C, e ritirando indietro la parte suttesa all' arco B b, la quale vien soprapposta alla linea B A. Ed intendendo continuarsi nell' istesso modo la

conversione fatta dal minor poligono, questo descriverà bene, e passerà sopra la sua parallela una linea eguale al suo perimetro, ma il maggiore passerà una linea minore del suo perimetro la quantità di tante linee b B, quanti sono uno manco dei suoi lati; e sarà tal linea prossimamente eguale alla descritta dal poligono minore, eccedendola solamente di quanto è la b B. Qui dunque senza veruna repugnanza si scorge la cagione, per la quale il maggior poligono non trapassi ( portato dal minore ) con i suoi lati linea maggiore della passata dal minore; che è, perchè una parte di ciascheduno si soprappone al suo precedente conterminale.

Ma se considereremo i due cerchi intorno al centro A, li quali sopra le loro parallele posino, toccando il minore la sua nel punto B, ed il maggiore la sua nel punto C, qui nel cominciare a far la revoluzione del minore, non avverrà, che il punto B resti per qualche tempo immobile, sicchè la linea B G dando in dietro trasporti il punto C, come accadeva nei poligoni, che restando fisso il punto I, sinchè il lato K I cadesse sopra la linea I M, la linea I B riportava indietro il B termine del lato G B sino in b, onde il lato B G cadeva in b C soprapponendo alla linea B A la parte B b, e solo avanzandosi per l'innanzi la parte B C eguale alla I M, cioè a un lato del poligono minore,

per le quali soprapposizioni, che sono gli eccessi dei lati maggiori sopra i minori, gli avanzi, che restano eguali ai lati del minor poligono, vengono a comporre nell' intera revoluzione la linea retta eguale alla segnata, e misurata dal poligno minore. Ma qui dico, che se noi vorremo applicare un simil discorso all' effetto dei cerchi, converrà dire, dove i lati di qualsivoglia poligono son compresi da qualche numero, i lati del cerchio sono infiniti; quelli son quanti, e divisibili, questi non quanti e indivisibili; i termini dei lati del poligono nella revoluzione stanno per qualche tempo fermi, cioè ciascheduno tal parte del tempo di una intera conversione, qual parte esso è di tutto il perimetro; nei cerchi similmente le dimore de' termini de' suoi infiniti lati son momentanee, che tal parte è un instante di un tempo quanto, quale è un punto di una linea, che ne contiene infiniti; i regressi indietro fatti dai lati del maggior poligono sono non di tutto il lato, ma solamente dell' eccesso suo sopra il lato del minore, acquistando per l' innanzi tanto di spazio, quanto è il detto minor lato; nei cerchi il punto, o lato C nella quiete instantanea del termine B si ritira indietro, quanto è il suo eccesso sopra il lato B, acquistando per l' innanzi quanto è il medesimo B. Ed in somma gl' infiniti lati indivisibili del maggior cerchio cogli

infiniti indivisibili ritiramenti loro, fatti nell' infinite instantanee dimore degl'infiniti termini degl' infiniti lati del minor cerchio, e con i loro infiniti progressi eguali agl' infiniti lati di esso minor cerchio, compongono, e disegnano una linea eguale alla descritta dal minor cerchio, contenente in se infinite soprapposizioni non quante, che fanno una costipazione, e condensazione senza veruna penetrazione di parti quante, quale non si può intendere farsi nella linea divisa in parti quante, quale è il perimetro di qualsivoglia poligono, il quale disteso in linea retta non si può ridurre in minor lunghezza, se non col far, che i lati si soprappongano, e penetrino l'un l' altro. Questa costipazione di parti non quante, ma infinite senza penetrazione di parti quante, e la prima distrazione di sopra dichiarata degl' infiniti indivisibili coll' interposizione di vacui indivisibili, credo che sia il più, che dir si possa per la condensazione, e rarefazione dei corpi, senza necessità d' introdurre la penetrazione dei corpi, o gli spazj quanti vacui. Se ci è cosa, che vi gusti, fatene capitale, se no, riputatela vana, e il mio discorso ancora, e ricercate di qualche altra esplicazione di maggior quiete per l' intelletto. Solo queste due parole vi replico, che noi siamo tra gl' infiniti, e gl' indivisibili.

*Sagr.* Che il pensiero sia sottile, ed

a' miei orecchi nuovo e peregrino, lo confesso liberamente: se poi nel fatto stesso la natura proceda con tale ordine, non saprei, che risolvermi: vero è, che sin che io non sentissi cosa, che maggiormente mi quietasse, per non rimaner muto affatto, mi atterrei a questa. Ma forse il Sig. Simp. avrà ( quello che sin qui non ho incontrato ) modo di esplicare l'esplicazione, che in materia così astrusa dai Filosofi si arreca; che in vero quel, che sin qui ho letto circa la condensazione, è per me così denso, e quel della rarefazione così sottile, che la mia debol vista questo non comprende, e quello non penetra.

*Simp.* Io son pieno di confusione, e trovo duri intoppi nell' un sentire, e nell' altro, e in particolare in questo nuovo, perchè secondo questa regola un' oncia di oro si potrebbe rarefare, e distrarre in una mole maggiore di tutta la terra, e tutta la terra condensare, e ridurre in minor mole di una noce: cose, che io non credo, nè credo, che voi medesimo crediate; e le considerazioni, e dimostrazioni sin qui fatte da voi, come che son cose Matematiche astratte, e separate dalla materia sensibile, credo, che applicate alle materie fisiche, e naturali non camminerebbero secondo coteste regole.

*Salv.* Che io vi sia per far vedere l'invisibile, nè io lo saprei fare, nè credo

voi lo ricerchiate, ma per quanto dai nostri sensi può esser compreso, giacchè voi avete nominato l'oro, non veggiamo noi farsi immensa distrazione delle sue parti? Non so, se vi sia occorso il veder le maniere, che tengono gli artefici in condur l'oro tirato, il quale non è veramente oro se non in superficie, ma la materia interna è argento; ed il modo del condurlo è tale. Pigliano un cilindro, o volete dire una verga di argento lunga circa mezzo braccio, e grossa per tre, o quattro volte il dito pollice, e questa indorano con foglie di oro battuto, che sapete esser così sottile, che quasi va vagando per l'aria, e di tali foglie ne soprappongono otto, o dieci, e non più. Dorato che è, cominciano a tirarlo con forza immensa, facendolo passare per i fori della filiera, tornando a farlo ripassare molte e molte volte successivamente per fori più angusti, sicchè dopo molte e molte ripassate lo riducono alla sottigliezza di un capello di donna, se non maggiore, e tuttavia resta dorato in superficie. Lascio ora considerare a voi quale sia la sottigliezza, e distrazione, alla quale si è ridotta la sustanza dell'oro.

*Simp.* Io non vedo, che da questa operazione venga in conseguenza un assottigliamento della materia dell'oro da farne quelle maraviglie, che voi vorreste: prima perchè già la prima doratura fu di

dieci foglie di oro, che vengono a far notabile grossezza: secondariamente sebbene nel tirare, e assottigliare quell' argento cresce in lunghezza, scema però anco tanto in grossezza, che compensando l' una dimensione coll' altra, la superficie non si augumenta tanto, che per vestir l' argento di oro bisogni ridurlo a sottigliezza maggiore di quella delle prime foglie.

*Salv.* V' ingannate di assai, Sig. Simp. perchè l' accrescimento della superficie, è sudduplo dell' allungamento, come io potrei geometricamente dimostrarvi.

*Sagr.* Io e per me, e pel Signor Simp. vi pregherei a recarci tal dimostrazione, se però credete, che da noi possa esser capita.

*Salv.* Vedrò se così improvvisamente mi torna a memoria. Già è manifesto, che quel primo grosso cilindro di argento, ed il filo lunghissimo tirato sono due cilindri eguali, essendo l' istesso argento; talchè se io mostrerò, qual proporzione abbiano tra di loro le superficie dei cilindri eguali, averemo l' intento. Dico per tanto, che

La superficie dei cilindri eguali, trattone le basi, son tra di loro in suddupIicata proporzione delle loro lunghezze.

Sieno due cilindri eguali, l' altezze dei quali A B, C D, (Fig. x.) e sia la linea E media proporzionale tra esse. Dico la superficie del cilindro A B, trattone le basi, alla superficie del cilindro C D, trat-

tone parimente le basi, aver la medesima proporzione, che la linea A B alla linea E, che è suddupla dalla proporzione di A B a C D. Taglisi la parte del cilindro A B in F, e sia l'altezza A F eguale alla C D. E perchè le basi de' cilindri eguali rispondon contrariamente alle loro altezze, il cerchio base del cilindro C D al cerchio base del cilindro A B sarà come l'altezza B A alla D C, e perchè i cerchi son tra loro come i quadrati dei diametri, avranno detti quadrati la medesima proporzione, che la B A alla C D; ma come B A a C D così il quadrato B A al quadrato della E; son dunque tali quattro quadrati proporzionali; e però i lor lati ancora saranno proporzionali: e come la linea A B alla E, così il diametro del cerchio C al diametro del cerchio A; ma come i diametri, così sono le circonferenze, e come le circonferenze, così sono ancora le superficie de' cilindri egualmente alti; adunque come la linea A B alla E: così la superficie del cilindro C D alla superficie del cilindro A F. Perchè dunque l' altezza A F alla A B sta come la superficie A F alla superficie A B, e come l' altezza A B alla linea E, così la superficie C D alla A F sarà per la perturbata, come l' altezza A F alla E, così la superficie C D alla superficie A B, e convertendo come la superficie del cilindro A B alla superficie del cilindro C D, così la linea E alla A F,

cioè alla C D, ovvero la A B alla E, che è proporzione suddupla della A B alla C D, che è quello, che bisognava provare.

Ora se noi applicheremo questo, che si è dimostrato, al nostro proposito, presupposto, che quel cilindro di argento, che fu dorato, mentre non era più lungo di mezzo braccio, e grosso tre, o quattro volte più del dito pollice, assottigliato alla finezza di un capello si sia allungato sino in venti mila braccia ( che sarebbe anche più assai ) troveremo la sua superficie esser cresciuta dugento volte più di quello, che era: ed in conseguenza quelle foglie di oro, che furon soprapposte dieci in numero, distese in superficie dugento volte maggiore, ci assicurano l'oro, che cuopre la superficie delle tante braccia di filo, restar non più grosso, che la ventesima parte di una foglia dell'ordinario oro battuto. Considerate ora voi, qual sia la sua sottigliezza, e se è possibile concepirla fatta senza una immensa distrazione di parti, e se questa vi pare una esperienza, che tenda anche ad una composizione d'infiniti indivisibili nelle materie fisiche: sebben di ciò non mancano altri più gagliardi, e concludenti rincontri.

*Sagr.* La dimostrazione mi par tanto bella, che quando non avesse forza di persuader quel primo intento, per lo quale è stata prodotta ( che pur mi par, che ve l'abbia grande ) ad ogni modo benissimo

dente la superficie del cilindro I D alla superficie dell' A E starà come l' altezza I F alla media tra I F, A B. Ma essendo pel dato la superficie A E eguale alla C F, ed avendo la superficie I D alla C F la medesima proporzione, che l' altezza I F, alla C D, adunque la C D è media tra le I F, A B. In oltre essendo il cilindro I D eguale al cilindro A E, avranno amendue la medesima proporzione al cilindro C F, ma l' I D al C F sta come l' altezza I F alla C D, adunque il cilindro A E al cilindro C F avrà la medesima proporzione, che la linea I F alla C D, cioè, che la C D alla A B, che è l' intento.

Di qui s' intende la ragione di un accidente, che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere, che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso, che per l' altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costumano fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l' altezza del sacco della minor misura della tela, e coll' altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l' opposito. Come se v. gr. la tela per un verso fusse sei braccia, e per l' altro dodici, più terrà, quando colla lunghezza di dodici si circonda la tavola del fondo, restando il sacco alto braccia sei, che se si circondasse un fondo di sei braccia avendone

dodici per altezza. Ora da quello, che si è dimostrato, alla generica notizia del capir più per quel verso, che per questo, si aggiugne la specifica, e particolare scienza del quanto ei contenga più, che è, che tanto più terrà, quanto sarà più basso, e tanto meno, quanto più alto: e così nelle misure assegnate essendo la tela il doppio più lunga, che larga, cucita per la lunghezza terrà la metà manco, che per l'altro verso. E parimente avendo una stuoja per fare una bugnola, lunga venticinque braccia, e larga v. g. sette, piegata per lo lungo terrà solamente sette misure di quelle, che per l'altro verso ne terrebbe venticinque.

*Sagr.* E così con nostro gusto particolare andiamo continuamente acquistando nuove cognizioni curiose, e non ignude di utilità. Ma nel proposito toccato adesso veramente non credo, che tra quelli che mancano di qualche cognizione di Geometria se ne trovassero quattro per cento, che non restassero a prima giunta ingannati, che quei corpi, che da superficie eguali son contenuti, non fussero ancora in tutto eguali: siccome nell'istesso errore incorrono parlando delle superficie, che per determinare, come spesse volte accade, delle grandezze di diverse Città, intera cognizione gli par d'averne, qualunque volta sanno la quantità dei recinti di quelle, ignorando, che può es-

sere un recinto eguale d'un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello, il che accade non solamente tra le superficie irregolari, ma tra le regolari, tra le quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati: sicchè in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito; di che mi ricordo averne con gusto particolare veduta la dimostrazione studiando la Sfera del Sacrobosco con un dottissimo Comentario sopra.

*Salv.* È verissimo, ed avendo io ancora incontrato cotesto luogo, mi dette occasione di ritrovare, come con una sola e breve dimostrazione si concluda il cerchio esser maggiore di tutte le figure regolari isoperimetre, e dell'altre quelle di più lati maggiori di quelle di manco.

*Sagr.* Ed io, che sento tanto diletto in certe proposizioni, e dimostrazioni scelte, e non triviali, importunandovi vi prego, che me ne facciate partecipe.

*Salv.* In brevi parole vi spedisco, dimostrando il seguente Teorema, cioè:

Il cerchio è medio proporzionale tra qualsivogliano due poligoni regolari tra di loro simili, dei quali uno gli sia circonscritto, e l'altro gli sia isoperimetro. In oltre essendo egli minore di tutti i circonscritti, è all'incontro massimo di tutti gli isoperimetri. Dei medesimi poi circonscrit-

ti quelli, che hanno più angoli, son minori di quelli, che ne hanno manco, ma all'incontro degl' isoperimetri quelli di più angoli son maggiori.

Delli due poligoni simili A, B (Fig. XII.) sia l'A circonscritto al cerchio A, e l' altro B ad esso cerchio sia isoperimetro. Dico il cerchio esser medio proporzionale tra essi. Imperocchè (tirato il semidiametro A C) essendo il cerchio eguale a quel triangolo rettangolo, dei lati del quale, che sono intorno all'angolo retto, uno sia eguale al semidiametro A C, e l'altro alla circonferenza; e similmente essendo il Poligono A eguale al triangolo rettangolo, che intorno all' angolo retto ha uno dei lati eguale alla medesima retta A C, e l' altro al perimetro del medesimo poligono, è manifesto il circonscritto poligono aver al cerchio la medesima proporzione, che ha il suo perimetro alla circonferenza di esso cerchio, cioè al perimetro del poligono B, che alla circonferenza detta si pone eguale: ma il poligono A al B ha doppia proporzione, che 'l suo perimetro al perimetro di B (essendo figure simili) adunque il cerchio A è medio proporzionale tra i due poligoni A, B; ed essendo il poligono A maggior del cerchio A, è manifesto esso cerchio A esser maggiore del poligono B suo isoperimetro, ed in conseguenza massimo di tutti i poligoni regolari suoi isoperimetri.

Quanto all' altra parte, cioè di provare, che dei poligoni circonscritti al medesimo cerchio, quello di manco lati sia maggior di quello di più lati, ma che all' incontro dei poligoni isoperimetri quello di più lati sia maggiore di quello di manco lati, dimostreremo così. Nel cerchio, il cui centro O semidiametro O A, sia la tangente A D, ed in essa pongasi per esempio A D esser la metà del lato del pentagono circonscritto, ed A C metà del lato dell' ettagono, e tirinsi le rette O G C, O F D, e centro O, intervallo O C descrivasi l' arco E C I. E perchè il triangolo D O C è maggiore del settore E O C, e 'l settore C O I maggiore del triangolo C O A, maggior porporzione avrà il triangolo D O C al triangolo C O A, che'l settore E O C al settore C O I, cioè che'l settore F O G al settore G O A, e componendo, e permutando, il triangolo D O A al settore F O A avrà maggior proporzione, che il triangolo C O A al settore G O A, e dieci triangoli D O A a dieci settori F O A avranno maggior proporzione, che quattordici triangoli C O A a quattordici settori G O A, cioè il pentagono circonscritto avrà maggior proporzione al cerchio, che non gli ha l' ettagono: e però il pentagono sarà maggiore dell' ettagono. Intendasi ora un ettagono, ed un pentagono isoperimetri al medesimo cerchio. Dico l' ettagono esser maggiore

del pentagono. Imperocchè essendo l'istesso cerchio medio proporzionale tra 'l pentagono circonscritto, e 'l pentagono suo isoperimetro, e parimente medio tra 'l circonscritto, e 'l isoperimetro ettagono; essendosi provato il circonscritto pentagono esser maggiore del circonscritto ettagono, avrà esso pentagono maggior proporzione al cerchio, che l'ettagono; cioè il cerchio avrà maggior proporzione al suo isoperimetro pentagono, che all'isoperimetro ettagono; adunque il pentagono è minore dell' isoperimetro ettagono; che si doveva dimostrare.

*Sagr.* Gentilissima dimostrazione, e molto acuta. Ma dove siamo trascorsi a ingolfarsi nella Geometria? mentre eramo sul considerare le difficoltà promosse dal Sig. Simpl. che veramente son di gran considerazione, ed in particolare quella della condensazione mi par durissima.

*Salv.* Se la condensazione, e la rarefazione son moti opposti, dove si veda un immensa rarefazione, non si potrà negare una non men grandissima condensazione; ma rarefazioni immense, e quel che accresce la maraviglia, quasi che momentanee le vediamo noi tutto 'l giorno. E quale sterminata rarefazione è quella di una poca quantità di polvere d'artiglieria risoluta in una mole vastissima di fuoco? e quale oltre a questa l'espansione, direi quasi senza termine, della sua luce? E se quel fuoco, e questo lume si riunissero insieme

che pur non è impossibile, poichè dianzi stettero dentro quel piccolo spazio, qual condensamento sarebbe questo? Voi discorrendo troverete mille di tali rarefazioni, che sono molto più in pronto ad esser osservate, che le condensazioni: perchè le materie dense son più trattabili, e sottoposte ai nostri sensi, che ben maneggiamo le legne, e le vediamo risolvere in fuoco, e in luce, ma non così vediamo il fuoco, e 'l lume condensarsi a costituire il legno; vediamo i frutti, i fiori, e mille altre solide materie risolversi in gran parte in odori, ma non così osserviamo gli atomi odorosi concorrere alla costituzione dei solidi odorati. Ma dove manca la sensata osservazione, si dee supplir col discorso, che basterà per farci capaci non men del moto alla rarefazione, e resoluzione dei solidi, che alla condensazione delle sostanze tenui, e rarissime. In oltre noi trattiamo, come si possa far la condensazione, e rarefazione dei corpi, che si possono rarefare, e condensare, speculando in qual maniera ciò possa esser fatto senza l' introduzion del vacuo, e della penetrazione dei corpi; il che non esclude, che in natura possano esser materie, che non ammettono tali accidenti, ed in conseguenza non danno luogo a quelli, che voi chiamate inconvenienti, e impossibili. E finalmente, Sig. Simpl. io in grazia di voi altri Signori Filosofi mi sono

affaticato in specolare, come si possa intendere farsi la condensazione, e la rarefazione senza ammettere la penetrazione dei corpi, e l'introduzione degli spazj vacui: effetti da voi negati, ed abborriti, che quando voi gli voleste concedere, io non vi sarei così duro contraddittore. Però o ammettete questi inconvenienti; o gradite le mie specolazioni, o trovatene di più aggiustate.

*Sagr.* Alla negativa della penetrazione son io del tutto con i Filosofi Peripatetici. A quella del vacuo vorrei sentir ben ponderare la dimostrazione d'Aristotile, colla quale ei l'impugna, e quello che voi, Sig. Salv. gli opponete. Il Sig. Simp. mi farà grazia di arrecar puntualmente la prova del Filosofo, e voi Sig. Salv. la riposta.

*Simp.* Aristotile, per quanto mi sovviene, insurge contro alcuni antichi, i quali introducevano il vacuo, come necessario pel moto, dicendo, che questo senza quello non si potrebbe fare. A questo contrapponendosi Aristotile dimostra, che all'opposito il farsi (come vogliamo) il moto distrugge la posizione del vacuo; e 'l suo progresso è tale. Fa due supposizioni: l'una è di mobili diversi in gravità mossi nel medesimo mezzo: l'altra è dell'istesso mobile mosso in diversi mezzi. Quanto al primo, suppone che mobili diversi in gravità si muovano nell'istesso mezzo con di-

seguali velocità, le quali mantengano tra di loro la medesima proporzione, che le gravità; sicchè per esempio un mobile dieci volte più grave d' un altro si muova dieci volte più velocemente. Nell' altra posizione piglia, che le velocità del medesimo mobile in diversi mezzi ritengano tra di loro la proporzione contraria di quella che hanno le grossezze, o densità di essi mezzi; talmente che posto, v. g. che la crassizie dell'acqua fosse dieci volte maggiore di quella dell' aria, vuole, che la velocità nell' aria sia dieci volte più, che la velocità nell'acqua. E da questo secondo supposto trae la dimostrazione in cotal forma. Perchè la tenuità del vacuo supera d' infinito intervallo la corpulenza benchè sottilissima di qualsivoglia mezzo pieno, ogni mobile, che nel mezzo pieno si movesse per qualche spazio in qualche tempo, nel vacuo dovrebbe muoversi in uno istante; ma farsi moto in uno istante è impossibile; adunque darsi il vacuo in grazia del moto è impossibile.

*Salv.* L'argomento si vede, che è *ad hominem*, cioè contro a quelli, che volevano il vacuo come necessario pel moto. Che se io concederò l'argomento come concludente, concedendo insieme, che nel vacuo non si farebbe il moto, la posizion del vacuo assolutamente presa, e non in relazione al moto, non vien distrutta. Ma per dire quel, che per avventura potrebber rispondere quegli antichi, acciò meglio

si scorga, quanto concluda la dimostrazione di Aristotile, mi par, che si potrebbe andar contro agli assunti di quello, negandogli amendue. E quanto al primo: io grandemente dubito, che Aristotile non sperimentasse mai quanto sia vero, che due pietre una più grave dell' altra dieci volte, lasciate nel medesimo istante cader da un' altezza, v. gr. di cento braccia, fusser talmente differenti nelle loro velocità, che all' arrivo della maggior in terra l' altra si trovasse non avere nè anco sceso dieci braccia.

*Simpl.* Si vede pure dalle sue parole, che ei mostra di averlo sperimentato, perchè ei dice: Vediamo il più grave; or quel vedersi accenna l' averne fatta l'esperienza.

*Sagr.* Ma io, Sig. Simplicio, che ne ho fatto la prova, vi assicuro, che una palla di artiglieria, che pesi cento, dugento, ed anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l'arrivo in terra della palla di un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall' altezza di dugento braccia.

*Salv.* Ma senz' altre esperienze con breve, e concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare non esser vero, che un mobile più grave si muova più velocemente di un altro men grave, intendendo di mobili dell' istessa materia; ed in somma di questi, dei quali parla Aristotile. Però ditemi, Sig. Simplicio, se voi am-

mettete, che di ciascheduno corpo grave cadente sia una da natura determinata velocità; sicchè l'accrescergliela, o diminuirgliela non si possa se non con usargli violenza, o oppergli qualche impedimento.

*Simp.* Non si può dubitare, che l'istesso mobile nell'istesso mezzo abbia una statuita, e da natura determinata velocità, la quale non se gli possa accrescere se non con nuovo impeto conferitogli, o diminuirgliela, salvo che con qualche impedimento, che lo ritardi.

*Salv.* Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità dei quali fossero ineguali, è manifesto, che se noi congiugnessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall'altro più veloce. Non concorrete voi meco in questa opinione?

*Simp.* Parmi, che così debba indubitabilmente seguire.

*Salv.* Ma se questo è, ed è insieme vero, che una pietra grande si muove per esempio con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque congiugnendole amendue insieme, il composto di loro si moverà con velocità minore di otto gradi; ma le due pietre congiunte insieme fanno una pietra maggiore, che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità; adunque questa maggiore si muove men velocemente, che la minore; che

è contro alla vostra supposizione. Vedete dunque, come dal suppor, che il mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo il più grave muoversi men velocemente.

*Simp.* Io mi trovo avviluppato, perchè mi par pure, che la pietra minore aggiunta alla maggiore le aggiunga peso, e aggiugnendole peso non so, come non debba aggiugnerle velocità, o almeno non diminuirgliela.

*Salv.* Qui commettete un altro errore, Sig. Simplicio, perchè non è vero, che quella minor pietra accresca peso alla maggiore.

*Simp.* Oh questo passa bene ogni mio concetto.

*Salv.* Non lo passerà altrimenti, fatto che io vi abbia accorto dell' equivoco, nel quale voi andate fluttuando: però avvertite, che bisogna distinguere i gravi posti in moto, dai medesimi costituiti in quiete. Una pietra messa nella bilancia non solamente acquista peso maggiore col soprapporgli un' altra pietra, ma anco la giunta di un pennecchio di stoppa la farà pesar più quelle sei o dieci once, che peserà la stoppa; ma se voi lascerete liberamente cader da un'altezza la pietra legata colla stoppa, credete voi, che nel moto la stoppa graviti sopra la pietra, onde gli debba accelerar il suo moto: o pur credete, che ella la ritarderà sostenendola in

parte? Sentiamo gravitarci su le spalle, mentre vogliamo opporci al moto, che farebbe quel peso, che ci sta addosso; ma se noi scendessimo con quella velocità, che quel tal grave naturalmente scenderebbe, in che modo volete, che ci prema, e graviti sopra? Non vedete, che questo sarebbe un voler ferir colla lancia colui, che vi corre innanzi con tanta velocità, con quanta, o con maggiore di quella, colla quale voi lo seguite. Concludete per tanto, che nella libera, e naturale caduta la minor pietra non gravita sopra la maggiore, ed in conseguenza non le accresce peso, come fa nella quiete.

*Simp.* Ma chi posasse la maggiore sopra la minore?

*Salv.* Le accrescerebbe peso, quando il suo moto fosse più veloce; ma già si è concluso, che quando la minore fosse più tarda, ritarderebbe in parte la velocità della maggiore, tal che il lor composto si muoverebbe men veloce, essendo maggiore dell'altra; che è contro al vostro assunto. Concludiamo perciò, che i mobili grandi, e i piccoli ancora, essendo della medesima gravità in ispecie, si muovono con pari velocità.

*Simpl.* Il vostro discorso procede benissimo veramente: tuttavia mi par duro a credere, che una lagrima di piombo si abbia a muover così veloce, come una palla di artiglieria.

*Salv.* Voi doverate dire un grano di rena, come una macina da guado. Io non vorrei, Sig. Simplicio, che voi faceste, come alcuni fanno, che divertendo il discorso dal principale intento vi attaccaste a un mio detto, che mancasse dal vero quanto è un capello, e che sotto questo capello voleste nasconder un difetto di un altro grande, quanto una gomina da nave. Aristotile dice: una palla di ferro di cento libbre cadendo dall' altezza di cento braccia arriva in terra prima, che una di una libbra sia scesa un sol braccio: io dico, che elle arrivano nell' istesso tempo: voi trovate, che la maggiore anticipa due dita la minore, cioè, che quando la grande percuote in terra, l' altra ne è lontana due dita: voi ora vorreste dopo queste due dita appiattare le novantanove braccia di Aristotile, e parlando solo del mio minimo errore, metter sotto silenzio l' altro massimo. Aristotile pronunzia, che mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono (per quanto dipende dalla gravità) con velocitadi proporzionate ai pesi loro, e l' esemplifica con mobili, nei quali si possa scorgere il puro, ed assoluto effetto del peso, lasciando l' altre considerazioni sì delle figure, come dei minimi momenti, le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo, che altera il semplice effetto della sola gravità: che perciò si vede l' oro gravissimo sopra tutte l' altre ma-

terie ridotto in una sottilissima foglia andar vagando per aria; l'istesso fanno i sassi pestati in sottilissima polvere. Ma se voi volete mantenere la proposizione universale, bisogna che voi mostriate, la proporzione delle velocità osservarsi in tutti i gravi e che un sasso di venti libbre si muova dieci volte più veloce, che uno di due: il che vi dico esser falso, e che cadendo dall'altezza di cinquanta, o cento braccia arrivano in terra nell'istesso momento.

*Simpl.* Forse da grandissime altezze di migliaja di braccia seguirebbe quello, che in queste altezze minori non si vede accadere.

*Salv.* Se Aristotile avesse inteso questo, voi gli addossereste un altro errore, che sarebbe una bugia; perchè non si trovando in terra tali altezze perpendicolari, chiara cosa è, che Aristotile non ne poteva aver fatta esperienza: e pur ci vuol persuadere di averla fatta, mentre dice, che tale effetto si vede.

*Simp.* Aristotile veramente non si serve di questo principio, ma di quell'altro, che non credo, che patisca queste difficoltà.

*Salv.* E l'altro ancora non è men falso di questo; e mi maraviglio, che per voi stesso non penetriate la fallacia, e che non vi accorgiate, che quando fosse vero, che l'istesso mobile in mezzi di differente

sottilità, e rarità, ed in somma di diversa cedenza, quali per esempio son l'acqua, e l'aria, si movesse con velocità nell'aria maggiore, che nell'acqua secondo la proporzione della rarità dell'aria a quella dell'acqua ne seguirebbe, che ogni mobile, che scendesse per aria, scenderebbe anco nell'acqua; il che è tanto falso, quanto che moltissimi corpi scendono nell'aria, che nell'acqua non pur non discendono, ma sormontano all'in su.

*Simp.* Io non intendo la necessità della vostra conseguenza; e più dirò che Aristotile parla di quei mobili gravi, che discendono nell'un mezzo, e nell'altro, e non di quelli, che scendono nell'aria, e nell'acqua vanno all'in su.

*Salv.* Voi arrecate pel Filosofo di quelle difese, che egli assolutamente non produrrebbe per non aggravare il primo errore. Però ditemi se la corpulenza dell'acqua, o quel che si sia, che ritarda il moto, ha qualche proporzione alla corpulenza dell'aria, che meno lo ritarda; e avendola, assegnatela a vostro beneplacito.

*Simp.* Halla, e ponghiamo ch'ella sia in proporzione decupla; e che però la velocità di un grave, che discenda in amendue gli elementi, sarà dieci volte più tardo nell'acqua, che nell'aria.

*Salv.* Piglio adesso un di quei gravi, che vanno in giù nell'aria, ma nell'acqua

no, qual sarebbe una palla di legno, e vi domando, che voi gli assegniate qual velocità più vi piace, mentre scende per aria.

*Simp.* Ponghiamo, che ella si muova con venti gradi di velocità.

*Salv.* Benissimo. Ed è manifesto, che tal velocità a qualche altra minore può aver la medesima proporzione, che la corpulenza dell' acqua a quella dell' aria, e che questa sarà la velocità di due soli gradi; tal che veramente a filo, e a dirittura, conforme all' assunto d' Aristotile, si dovrebbe concludere, che la palla di legno, che nell' aria dieci volte più cedente dell' acqua si muove scendendo con venti gradi di velocità, nell' acqua dovrebbe scendere con due, e non venire a galla dal fondo come fa: se già voi non voleste dire, che nell' acqua il venire ad alto nel legno sia l' istesso, che 'l calare a basso con due gradi di velocità; il che non credo. Ma già che la palla del legno non cala al fondo, credo pure che mi concederete, che qualche altra palla d' altra materia diversa dal legno si potrebbe trovare, che nell' acqua scendesse con due gradi di velocità.

*Simpl.* Potrebbesi senza dubbio; ma di materia notabilmente più grave del legno.

*Salv.* Questo è quel ch' io vo cercando. Ma questa seconda palla, che nell' acqua discende con due gradi di velocità,

con quanta velocità discenderà nell'aria? Bisogna (se volete servar la regola d'Aristotile) che rispondiate, che si muoverà con venti gradi: ma venti gradi di velocità avete voi medesimo assegnati alla palla di legno: adunque questa, e l'altra assai più grave si moveranno per l'aria con egual velocità. Or come accorda il Filosofo questa conclusione coll'altra sua, che i mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono con diverse velocità, e diverse tanto, quanto le gravità loro? Ma senza molto profonde contemplazioni, come avete voi fatto a non osservar accidenti frequentissimi, e palpabilissimi, e non badare a due corpi, che nell'acqua si muoveranno l'uno cento volte più velocemente dell'altro, ma che nell'aria poi quel più veloce non supererà l'altro di un sol centesimo? come per esempio un uovo di marmo scenderà nell'acqua cento volte più presto, che alcuno di gallina; che per l'aria nell'altezza di venti braccia non l'anticiperà di quattro dita; ed in somma tal grave andrà al fondo in tre ore in dieci braccia d'acqua, che in aria le passerà in una battuta, o due di polso, e tale (come sarebbe una palla di piombo) le passerà in tempo facilmente men che doppio. E qui so ben, Signor Simplicio, che voi comprendete, che non ci ha luogo distinzione, o risposta veruna. Concludiamo per tanto, che tale argomento non

conclude nulla contro al vacuo; e quando concludesse, distruggerebbe solamente gli spazj notabilmente grandi, quali nè io, nè credo, che quegli antichi supponessero naturalmente darsi, sebben forse con violenza si possan fare, come par che da varie esperienze si raccolga, le quali troppo lungo sarebbe il volere al presente arrecare.

*Sagr.* Vedendo che il Sig. Simplicio tace, piglierò io campo di dire alcuna cosa. Già che assai apertamente avete dimostrato, come non è altrimenti vero, che mobili disegualmente gravi si muovono nel medesimo mezzo con velocità proporzionate alle gravità loro, ma con eguale; intendendo dei gravi dell' istessa materia, ovvero dell' istessa gravità in ispecie, ma non già (come credo) di gravità differenti in ispecie (perchè non penso, che voi intendiate di concluderci, ch' una palla di sughero si muova con pari velocità ch'una di piombo) ed avendo di più dimostrato molto chiaramente, come non è vero, che il medesimo mobile in mezzi di diverse resistenze ritenga nelle velocità, e tardità sue la medesima proporzione, che le resistenze; a me sarebbe cosa gratissima il sentire, quali siano le proporzioni, che nell'un caso, e nell' altro vengono osservate.

*Salv.* I quesiti son belli, ed io ci ho molte volte pensato; vi dirò il discorso fattoci attorno, e quello che ne ho in ul-

timo ritratto. Dopo essermi certificato non esser vero, che il medesimo mobile in mezzi di diversa resistenza osservi nella velocità la proporzione delle cadenze di essi mezzi; nè meno, che nel medesimo mezzo mobili di diversa gravità ritengano nelle velocità loro la proporzione di esse gravità (intendendo anco delle gravità diverse in ispecie) cominciai a comporre insieme amendue questi accidenti, avvertendo quello, che accadesse dei mobili differenti di gravità posti in mezzi di diverse resistenze, e m'accorsi le disegualità delle velocità trovarsi tuttavia maggiori ne' mezzi più resistenti, che nei più cedenti, e ciò con diversità tali, che di due mobili, che scendendo per aria pochissimo differiranno in velocità di moto, nell'acqua l'uno si moverà dieci volte più veloce dell'altro; anzi che tale, che nell'aria velocemente discende, nell'acqua non solo non iscenderà, ma resterà del tutto privo di moto, e quel che è più, si moverà all'insù: perchè si potrà talvolta trovare qualche sorte di legno, o qualche nodo, o radica di quello, che nell'acqua potrà stare in quiete, che nell'aria velocemente discenderà.

*Sagr.* Io più volte mi son messo con una estrema flemma per vedere di ridurre una palla di cera, che per se stessa non va a fondo, coll'aggiugnerle grani di rena, a segno tale di gravità simile al-

l' acqua, che nel mezzo di quella si fermasse; nè mai per diligenza usata mi successe il poterlo conseguire; onde non so se altra materia solida si ritrovi tanto naturalmente simile in gravità all'acqua, che posta in essa in ogni luogo potesse fermarsi.

*Salv.* Sono in questo, come in mille altre operazioni, assai più diligenti molti animali, che non siamo noi altri. E nel vostro caso i pesci vi avrebber potuto porger qualche documento, essendo in questo esercizio così dotti, che ad arbitrio loro si equilibrano non solo con un'acqua, ma con differenti notabilmente o per propria natura, o per una sopravvenente torbida, o per salsedine, che fa differenza assai grande; si equilibrano, dico, tanto esattamente, che senza punto muoversi restano in quiete in ogni luogo: e ciò per mio credere fanno eglino, servendosi dello strumento datogli dalla natura a cotal fine, cioè di quella vescichetta, che hanno in corpo, la quale per uno assai angusto meato risponde alla lor bocca; e per quello a posta loro o mandano fuori parte dell'aria, che in dette vesciche si contiene, o venendo col nuoto a galla, altra ne attraggono, rendendosi con tale arte or più, or meno gravi dell' acqua, ed a lor beneplacito equilibrandosegli.

*Sagr.* Io con un altro artifizio ingannai alcuni amici, appresso i quali mi era

vantato di ridurre quella palla di cera al giusto equilibrio coll'acqua, ed avendo messo nel fondo del vaso una parte di acqua salata, e sopra quella della dolce, mostrai loro la palla, che a mezz'acqua si fermava, e spinta nel fondo, e sospinta ad alto nè in questo, nè in quel sito restava, ma ritornava nel mezzo.

*Salv.* Non è cotesta esperienza priva di utilità: perchè trattandosi dai Medici in particolare delle diverse qualità di acque, e tra l'altre principalmente della leggerezza, o gravità più di questa, che di quella, con una simil palla aggiustata, sicchè resti ambigua, per così dire, tra lo scendere, e 'l salire in un'acqua, per minima che sia la differenza di peso tra due acque, se in una tal palla scenderà, nell'altra, che sia più grave, salirà. Ed è talmente esatta cotale esperienza, che la giunta di due grani di sale solamente, che si mettano in sei libbre d'acqua, farà risalire dal fondo alla superficie quella palla, che vi era pur allora scesa. E più vi voglio dire in confermazione dell'esattezza di questa esperienza, ed insieme per chiara prova della nulla resistenza dell'acqua all'esser divisa, che non solamente l'ingravirla colla mistione di qualche materia più grave di lei induce tanto notabil differenza, ma il riscaldarla, o raffreddarla un poco produce il medesimo effetto, e con sì sottile operazione, che l'in-

fonder quattro gocciole d'altra acqua un poco più calda, o un poco più fredda delle sei libbre, farà che la palla vi scenda, o vi sormonti: vi scenderà infondendovi la calda, e monterà per l'infusione della fredda. Or vedete quanto s'ingannino quei Filosofi, che voglion metter nell'acqua viscosità, o altra congiunzione di parti, che la facciano resistente alla divisione, o penetrazione.

*Sagr.* Vidi molto concludenti discorsi intorno a questo argomento in un trattato del nostro Accademico: tuttavia mi resta un gagliardo scrupolo, il quale non so rimuovere; perchè se nulla di tenacità, e coerenza risiede tra le parti dell'acqua, come possono sostenersi assai grandi pezzi, e molto rilevati in particolare sopra le foglie dei cavoli senza spargersi, e spianarsi?

*Salv.* Ancorchè vero sia, che colui, che ha dalla sua la conclusione vera, possa risolvere tutte l'istanze, che vengono opposte in contrario, non però mi arrogherei io il poter ciò fare, nè la mia impotenza dee denigrare la candidezza della verità. Io primieramente vi confesso, che non so, come vada il negozio del sostenersi quei globi d'acqua assai rilevati, e grandi, sebbene io so di certo, che da tenacità interna, che sia tra le sue parti, ciò non deriva; onde resta necessario, che la cagione di cotal effetto risegga fuori. Che ella non sia interna, oltre all'espe-

rienze mostrate, ve lo posso confermare con un'altra efficacissima. Se le parti di quell'acqua, che rilevata si sostiene, mentre è circondata dall'aria, avessero cagione interna per ciò fare, molto più si sosterrebbono circondate che fossero da un mezzo, nel quale avessero minor propensione di discendere, che nell'aria ambiente non hanno; ma un mezzo tale sarebbe ogni fluido più grave dell'aria, v. g. il vino: e però infondendo intorno a quel globo d'acqua del vino, se gli potrebbe alzare intorno intorno, senza che le parti dell'acqua, conglutinate dall'interna viscosità, si dissolvessero; ma ciò non accade egli, anzi non prima se gli accosterà il liquore sparsogli intorno, che senza aspettar, che molto se gli elevi intorno, si dissolverà, e spianerà restandogli di sotto, se sarà vino rosso; è dunque esterna, e forse dell'aria ambiente la cagione di tale effetto. E veramente si osserva una gran dissensione tra l'aria, e l'acqua, la quale ho io in un'altra esperienza osservata; e questa è: S'io empio d'acqua una palla di cristallo, che abbia un foro angusto, quant'è la grossezza d'un fil di paglia, e così piena la volto colla bocca all'ingiù, non però l'acqua, benchè gravissima, e pronta a scender per aria, nè l'aria altrettanto disposta a salire, come leggerissima, per l'acqua, si accordano quella a scendere uscendo pel foro, e questa a salire en-

trandovi, ma rèstano amendue ritrose e contumaci. All'incontro poi se io presenterò a quel foro un vaso con del vino rosso, che quasi insensibilmente è men grave dell'acqua, lo vedremo subito con tratti rosseggianti lentamente ascendere per mezzo l'acqua, e l'acqua con pari tardità scender pel vino senza punto mescolarsi, fin che finalmente la palla si empirà tutta di vino, e l'acqua calerà tutta nel fondo del vaso di sotto. Or che si dee qui dire, o che argumentarne, fuor che una disconvenienza tra l'acqua, e l'aria occulta a me, ma forse . . . . .

*Simpl.* Mi vien quasi da ridere nel veder la grande antipatia, che ha il Sig. Salviati coll'antipatia, che nè pur vuol nominarla, e pur è tanto accomodata a scior la difficoltà.

*Salv.* Or sia questa in grazia del Sig. Simplicio la soluzione del nostro dubbio; e lasciato il digredire torniamo al nostro proposito. Veduto come la differenza di velocità nei mobili di gravità diverse si trova esser sommamente maggiore nei mezzi più e più resistenti: ma che più nel mezzo dell'argento vivo l'oro non solamente va in fondo più velocemente del piombo, ma esso solo vi discende, e gli altri metalli, e pietre tutti vi si muovono in su, e vi galleggiano; dove che tra palle d'oro, di piombo, di rame, di porfido, o di altre ma-

terie gravi, quasi del tutto insensibile sarà la disegualità del moto per aria, che sicuramente una palla d'oro nel fine della scesa di cento braccia non preverrà una di rame di quattro dita: veduto, dico, questo, cascai in opinione, che se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie discenderebbero con eguali velocità.

*Simpl.* Gran detto è questo, Sig. Salv. Io non crederò mai, che nell'istesso vacuo, se pur vi si desse il moto, un fiocco di lana si movesse così veloce come un pezzo di piombo.

*Salv.* Pian piano, Sig. Simpl. la vostra difficoltà non è tanto recondita, nè io così inavveduto, che si debba credere, che non mi sia sovvenuta, e che in conseguenza io non vi abbia trovato ripiego. Però per mia dichiarazione, e vostra intelligenza sentite il mio discorso. Noi siamo sul volere investigare quello, che accaderebbe ai mobili differentissimi di peso in un mezzo, dove la resistenza sua fosse nulla, sicchè tutta la differenza di velocità, che tra essi mobili si ritrovasse, riferir si dovesse alla sola disuguaglianza di peso. E perchè solo uno spazio del tutto voto di aria, e di ogni altro corpo, ancor che tenue, e cedente, sarebbe atto a sensatamente mostrarci quello, che ricerchiamo, giacchè manchiamo di cotale spazio, an-

dremo osservando ciò, che accaggia nei mezzi più sottili, e meno resistenti in comparazione di quello, che si vede accadere negli altri manco sottili e più resistenti. Che se noi troveremo in fatto, i mobili differenti di gravità meno e meno differir di velocità, secondo che i mezzi più e più cedenti si troveranno; e che finalmente, ancorchè estremamente diseguali di peso nel mezzo più di ogni altro tenue, sebben non voto, piccolissima si scorga, e quasi inosservabile la diversità della velocità, parmi che ben potremo con molto probabil conghiettura credere, che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali. Per tanto consideriamo ciò che accade nell'aria; dove per avere una figura di superficie ben terminata, e di materia leggerissima, voglio che pigliamo una vescica gonfiata, nella quale l'aria, che vi sarà dentro, peserà nel mezzo dell'aria stessa niente, o poco, perchè poco vi si potrà comprimere, talchè la gravità è solo quella poca della stessa pellicola, che non sarebbe la millesima parte del peso di una mole di piombo grande, quanto la medesima vescica gonfiata. Queste, Sig. Simp. lasciate dall'altezza di quattro, o sei braccia, di quanto spazio stimereste, che il piombo fusse per anticipare la vescica nella sua scesa? siate sicuro, che non l'anticiperebbe

del triplo, nè anche del doppio, sebbeni già l'aveste fatto mille volte più veloce.

*Simpl.* Potrebbe esser, che nel principio del moto, cioè nelle prime quattro, o sei braccia accadesse cotesto, che dite: ma nel progresso, ed in una lunga continuazione credo che il piombo se la lascerebbe in dietro non solamente delle dodici parti dello spazio le sei, ma anco le otto, e le dieci.

*Salv.* Ed io ancora credo l'istesso, e non dubito, che in distanze grandissime potesse il piombo aver passato cento miglia di spazio, che la vescica ne avesse passato un solo. Ma questo, Sig. Simp. mio, che voi proponete come effetto contrariante alla mia proposizione, è quello che massimamente la conferma. È (torno a dire) l'intento mio dichiarare, come delle diverse velocità di mobili di differente gravità non ne sia altrimenti causa la diversa gravità, ma che ciò dipenda da accidenti esteriori, ed in particolare dalla resistenza del mezzo, sicchè tolta questa tutti i mobili si moverebber con i medesimi gradi di velocità. E questo deduco io principalmente da quello, che ora voi stesso ammettete, e che è verissimo, cioè, che di mobili differentissimi di peso le velocità più e più differiscono, secondo che maggiori e maggiori sono gli spazj, che essi van trapassando: effetto, che non seguirebbe, quando ei dipendesse dalle diffe-

renti gravità. Imperocchè essendo esse sempre le medesime, medesima dovrebbe mantenersi sempre la proporzione tra gli spazj passati, la qual proporzione noi vediamo andar nella continuazion del moto sempre crescendo; poichè l'un mobile gravissimo nella scesa di un braccio non anticiperà il leggerissimo della decima parte di tale spazio, ma nella caduta di dodici braccia lo preverrà della terza parte, in quella di cento l'anticiperà di $\frac{90}{100}$

*Simpl.* Tutto bene: ma seguitando le vostre vestigie, se la differenza di peso in mobili di diversa gravità non può cagionare la mutazion di proporzione nelle velocità loro, attesochè le gravità non si mutano, nè anco il mezzo, che sempre si suppone mantenersi l'istesso, potrà cagionare alterazion alcuna nella proporzione delle velocità.

*Salv.* Voi acutamente fate instanza contro al mio detto, la quale è ben necessario di risolvere. Dico per tanto, che un corpo grave ha da natura intrinseco principio di muoversi verso il comun centro dei gravi, cioè del nostro globo terrestre, con movimento continuamente accelerato, ed accelerato sempre egualmente, cioè, che in tempi eguali si fanno aggiunte eguali di nuovi momenti, e gradi di velocità. E questo si dee intender verificarsi, tuttavolta che si rimovessero tutti gl'impedimenti acci-

dentarj, ed esterni; tra i quali uno ve ne ha, che noi rimuover non possiamo, che è l'impedimento del mezzo pieno, mentre dal mobile cadente deve essere aperto, e lateralmente mosso, al qual moto trasversale il mezzo, benchè fluido, cedente, è quieto, si oppone con resistenza or minore, ed or maggiore, e maggiore, secondo che lentamente, e velocemente ei deve aprirsi per dar il transito al mobile, il quale perchè, come ho detto, si va per sua natura continuamente accelerando, vien per conseguenza ad incontrar continuamente resistenza maggiore nel mezzo, e però ritardamento, e diminuzione nell' acquisto di nuovi gradi di velocità, sicchè finalmente la velocità perviene a tal segno, e la resistenza del mezzo a tal grandezza, che bilanciandosi fra loro levano il più accelerarsi, e riducono il mobile in un moto equabile, ed uniforme, nel quale egli continua poi di mantenersi sempre. È dunque nel mezzo accrescimento di resistenza, non perchè si muti la sua essenza, ma perchè si altera la velocità colla quale ei dee aprirsi, e lateralmente muoversi, per cedere il passaggio al cadente, il quale va successivamente accelerandosi. Ora il vedere, che la resistenza dell' aria al poco momento della vescica è grandissima, ed al gran peso del piombo è piccolissima, mi fa tener per fermo, che chi la rimovesse del tutto, coll' arrecare alla vescica grandissimo co-

modo, ma ben poco al piombo, le velocità loro si pareggerebbero. Posto dunque questo principio, che nel mezzo, dove o per esser vacuo, o per altro non fusse resistenza veruna che ostasse alla velocità del moto, sicchè di tutti i mobili le velocità fusser pari, potremo assai congruamente assegnar le proporzioni delle velocità di mobili simili e dissimili nell' istésso, ed in diversi mezzi pieni, e però resistenti. E ciò conseguiremo col por mente, quanto la gravità del mezzo detrae alla gravità del mobile, la qual gravità è lo strumento col quale il mobile si fa strada rispingendo le parti del mezzo alle bande, operazione che non accade nel mezzo vacuo, e che però differenza nessuna si ha da attendere dalla diversa gravità. E perchè è manifesto il mezzo detrarre alla gravità del corpo da lui contenuto, quanto è il peso di altrettanta della sua materia, scemando con tal proporzione le velocità dei mobili che nel mezzo non resistente sarebbero ( come si è supposto ) eguali, aremo l' intento. Come per esempio, posto che il piombo sia dieci mila volte più grave dell' aria, ma l'ebano mille volte solamente, delle velocità di queste due materie, che assolutamente prese, cioè rimossa ogni resistenza, sarebbero eguali, l'aria al piombo detrae delli dieci mila gradi uno, ma all' ebano suttrae de' mille gradi uno, o vogliam dire dei dieci mila dieci. Quando dunque il piom-

bo e l'ebano scenderanno per aria da qualsivoglia altezza, la quale rimosso il ritardamento dell' aria avrebbon passata nell' istesso tempo, l'aria alla velocità del piombo detrarrà dei dieci mila gradi uno, ma all' ebano detrae dei dieci mila dieci, che è quanto a dire, che divisa quella altezza dalla quale si partono tali mobili, in dieci mila parti, il piombo arriverà in terra, restando in dietro l'ebano dieci, anzi pur nove delle dette dieci mila parti. E che altro è questo, salvo che cadendo una palla di piombo da una torre alta dugento braccia trovar che ella anticiperà una di ebano di manco di quattro dita? Pesa l'ebano mille volte più dell' aria, ma quella vescica così gonfia pesa solamente quattro volte tanto; l'aria dunque dalla intrinseca e naturale velocità dell' ebano detrae dei mille gradi uno, ma a quella che pur della vescica assolutamente sarebbe stata l'istessa, l'aria ne toglie delle quattro parti l'una: allora dunque che la palla di ebano cadendo dalla torre giugnerà in terra, la vescica ne averà passati i tre quarti solamente. Il piombo è più grave dell' acqua dodici volte, ma l' avorio il doppio solamente: l'acqua dunque alle assolute velocità loro, che sarebbero eguali, toglie al piombo la duodecima parte, ma all' avorio la metà: nell' acqua dunque quando il piombo sarà sceso undici braccia, l'avorio ne arà sceso sei. E discorrendo con tal

regola credo che troveremo l'esperienze molto più aggiustatamente risponder a cotal computo, che a quello di Aristotile. Con simil progresso troveremo la proporzione tra le velocità del medesimo mobile in diversi mezzi fluidi, paragonando non le diverse resistenze dei mezzi, ma considerando gli eccessi di gravità del mobile sopra le gravità dei mezzi; v. g. lo stagno è mille volte più grave dell' aria, e dieci più dell' acqua: adunque divisa la velocità assoluta dello stagno in mille gradi, nell' aria, che glie ne detrae la millesima parte, si moverà con gradi novecento novantanove, ma nell' acqua con novecento solamente, essendo che l'acqua gli detrae solo la decima parte della sua gravità, e l'aria la millesima. Posto un solido poco più grave dell' acqua, qual sarebbe v. g. il legno di rovere, una palla del quale pesando, diremo mille dramme, altrettanta acqua ne pesasse novecencinquanta, ma tanta aria ne pesasse due, è manifesto, che posto che la velocità sua assoluta fosse di mille gradi, in aria resterebbe di novecennovant' otto, ma in acqua solamente cinquanta, attesochè l'acqua dei mille gradi di gravità glie ne toglie novecencinquanta, e glie ne lascia solamente cinquanta; tal solido dunque si moverebbe quasi venti volte più velocemente in aria che in acqua: siccome l'eccesso della gravità sua sopra

quella dell' acqua è la vigesima parte della sua propria. E qui voglio che consideriamo, che non potendo muoversi in giù nell' acqua, se non materie più gravi in ispecie di lei; e per conseguenza per molte centinaja di volte più gravi dell' aria, nel ricercare qual sia la proporzione delle velocità loro in aria ed in acqua, possiamo senza notabile errore far conto, che l'aria non detragga cosa di momento dalla assoluta gravità, ed in conseguenza dall' assoluta velocità di tali materie; onde speditamente trovato l'eccesso della gravità loro sopra la gravità dell' acqua, diremo, la velocità loro per aria alla velocità loro per acqua aver la medesima proporzione, che la loro totale gravità all' eccesso di questa sopra la gravità dell' acqua. Per esempio una palla d'avorio pesa venti once, altrettanta acqua pesa once diciassette; adunque la velocità dell' avorio in aria alla sua velocità in acqua è prossimamente come venti a tre.

*Sagr.* Grandissimo acquisto ho fatto in una materia per se stessa curiosa, e nella quale, ma senza profitto, ho molte volte affaticata la mente: nè mancherebbe altro per poter anche praticare queste speculazioni, se non il trovar modo di poter venire in cognizione di quanta sia la gravità dell' aria rispetto all' acqua, ed in conseguenza all' altre materie gravi.

*Simp.* Ma quando si trovasse, che l'aria in vece di gravità avesse leggerezza, che si dovrebbe dire degli avuti discorsi per altro molto ingegnosi?

*Salv.* Converrebbe dire, che fussero stati veramente aerei, leggieri, e vani. Ma vorrete voi dubitare, se l'aria sia grave, mentre avete il testo chiaro di Aristotile, che l'afferma, dicendo, che tutti gli elementi hanno gravità, anco l'aria istessa? segno di che (soggiugne egli) ne è, che l'otro gonfiato pesa più che sgonfiato.

*Simpl.* Che l'otro o pallone gonfiato pesi più, crederei io, che procedesse non da gravità che sia nell'aria, ma nei molti vapori grossi tra essa mescolati in queste nostre regioni basse; mercè dei quali, direi io, che cresce la gravità dell'otro.

*Salv.* Non vorrei che lo diceste voi, e molto meno, che lo faceste dire ad Aristotile, perchè parlando egli degli elementi, e volendomi persuadere, che l'elemento dell'aria è grave, facendomelo veder coll'esperienza; se nel venire alla prova ei mi dicesse: piglia un otro, ed empilo di vapori grossi, ed osserva, che il suo peso crescerà; io gli direi, che più ancora peserebbe chi l'empiesse di semola; ma soggiugnerei dopo, che tali esperienze provano, che le semole ed i vapori grossi son gravi, ma quanto all'elemento dell'aria, resterei nel medesimo dubbio di prima. L'esperienza dunque di Aristotile è buona,

e la proposizion vera. Ma non direi già così di certa altra ragione presa pure *a signo* di un tal Filosofo, del quale non mi sovviene il nome, ma so che l'ho letta, il quale argomenta l'aria esser più grave che leggera, perchè più facilmente porta i gravi all' ingiù, che i leggieri all' insù.

*Sagr.* Bene per mia fe. Adunque per questa ragione l'aria sarà molto più grave dell'acqua, avvengachè tutti i gravi son portati più facilmente in giù per aria che per acqua, e tutti i leggeri più agevolmente in questa che in quella, anzi infinite materie salgono per acqua, che per aria calano a basso. Ma sia la gravità dell'otro, Sig. Simp. o per i vapori grossi, o per l'aria pura, questo niente osta al proposito nostro, che cerchiamo quel che accade a' mobili che si muovono in questa nostra regione vaporosa. Però ritornando a quello che più mi preme, vorrei per intera ed assoluta instruzione della presente materia, non solo restare assicurato, che l'aria sia (come io tengo per fermo) grave, ma vorrei, se è possibile, saper quanta sia la sua gravità. Però, Sig. Salv. se avete da soddisfarmi in questo ancora, vi prego a farmene favore.

*Salv.* Che nell' aria risegga gravità positiva, e non altrimenti, come alcuni hanno creduto, leggerezza, la quale forse in veruna materia non si ritrova, assai concludente argomento ce ne porge l'esperien-

za del pallone gonfiato posta da Aristotile, perchè se qualità di assoluta e positiva leggerezza fusse nell' aria, multiplicata e compressa l'aria crescerebbe la leggerezza, e in conseguenza la propensione di andare in su; ma l'esperienza mostra l'opposito. Quanto all' altra domanda, che è del modo d'investigare la sua gravità, io l'ho praticato in cotal maniera. Ho preso un fiasco di vetro assai capace, e col collo strozzato, al quale ho applicato un ditale di cuojo legato bene stretto nella strozzatura del fiasco, avendo in capo al detto ditale inserta, e saldamente fermata un' animella da pallone, per la quale con uno schizzatojo ho per forza fatto passar nel fiasco molta quantità di aria, della quale, perchè patisce di esser assaissimo condensata, se ne può cacciare due e tre altri fiaschi oltre a quella che naturalmente vi capisce. In una esattissima bilancia ho io poi pesato molto precisamente tal fiasco coll' aria dentrovi compressa, aggiustando il peso con minuta arena. Aperta poi l'animella, e dato l'esito all' aria violentemente nel vaso contenuta, e rimessolo in bilancia, trovandolo notabilmente alleggerito, sono andato detraendo del contrappeso tanta arena, salvandola da parte, che la bilancia resti in equilibrio col residuo contrappeso, cioè col fiasco. E qui non è dubbio, che il peso della rena salvata è quello dell' aria, che forzatamente fu messa nel fia-

sco, e che ultimameute n'è uscita. Ma tale esperienza sin qui non mi assicura di altro, se non che l'aria contenuta violentemente nei vaso pesò quanto la salvata arena, ma quanto risolutamente, e determinatamente pesi l'aria rispetto all'acqua, o ad altra materia grave, non per ancora so io, nè posso sapere, se io non misuro la quantità di quell' aria compressa: ed a questa investigazione bisogna trovar regola, nella quale ho trovato di potere in due maniere procedere. L'una delle quali è di pigliar un altro simil fiasco pur come il primo strozzato, alla strozzatura del qual sia strettamente legato un altro ditale, che dall' altra sua testa abbracci l'animella dell' altro, e intorno a quella con saldissimo nodo sia legato. Questo secondo fiasco convien che nel fondo sia forato, in modo che per tal foro si possa mettere uno stile di ferro, col quale si possa, quando vorremo, aprir la detta animella per dar l'esito alla soverchia aria dell' altro vaso pesata ch' ella sia: ma dee questo secondo fiasco esser pieno d'acqua. Apparecchiato il tutto nella maniera detta, ed aprendo collo stile l'animella, l'aria uscendo con impeto, e passando nel vaso dell' acqua, la caccerà fuora pel foro del fondo; ed è manifesto, la quantità dell' acqua, che in tal guisa verrà cacciata, esser eguale alla mole, e quantità d'aria, che dall' altro vaso sarà uscita. Salvata dunque tale acqua,

e tornato a pesare il vaso alleggerito dell' aria compressa ( il quale suppongo , che fusse pesato anche prima con detta aria sforzata ). e detratto al modo già dichiarato l'arena superflua , è manifesto questa essere il giusto peso di tanta aria in mole , quanta è la mole dell' acqua scacciata e salvata ; la quale peseremo , e vedremo quante volte il peso suo conterrà il peso della serbata arena ; e senza errore potremo affermar tante volte esser più grave l'acqua dell' aria , la quale non sarà dieci volte altrimenti , come par che stimasse Aristotile , ma ben circa quattrocento , come tale esperienza ne mostra.

L'altro modo è più spedito , e puossi fare con un vaso solo , cioè col primo accomodato nel modo detto , nel quale non voglio , che mettiamo altra aria oltre a quella che naturalmente vi si ritrova , ma voglio che vi cacciamo dell' acqua senza lasciare uscir punto di aria , la quale dovendo cedere alla sopravvenente acqua , è forza , che si comprima. Spintavi dunque più acqua che sia possibile , che pure senza molta violenza vi se ne potrà mettere i tre quarti della tenuta dal fiasco , e mettasi sulla bilancia , e diligentissimamente si pesi , il che fatto tenendo il vaso col collo in su , si apra l' animella dando l'uscita all' aria , della quale ne scapperà fuora giustamente quanta è l' acqua contenuta nel fiasco. Uscita che sia l' aria , si torni a

mettere il vaso in bilancia, il quale per la partita dell' aria si troverà alleggerito; e detratto dal contrappeso il peso superfluo, da esso avremo la gravità di tant' aria, quant' è l'acqua del fiasco.

*Simpl.* Gli artifizj ritrovati da voi non si può dire, che non sieno sottili, e molto ingegnosi: ma mentre mi pare, che in apparenza dieno intera soddisfazione all' intelletto, mi mettono per un altro verso in confusione. Imperocchè essendo indubitabilmente vero, che gli elementi nelle proprie regioni non sono nè leggeri, nè gravi, non posso intendere, come, dove quella porzione d'aria, che parve pesasse, v. gr. quattro dramme di rena, debba poi realmente aver tal gravità nell' aria, nella quale ben la ritiene la rena, che la contrappesò; e però mi pare, che l'esperienza dovesse esser praticata non nell' elemento dell' aria, ma in un mezzo, dove l'aria stessa potesse esercitare il suo talento del peso, se ella veramente ne possiede.

*Salv.* Acuta certo è l' opposizione del Signor Simpl. e però è necessario, o che ella sia insolubile, o che la soluzione sia non men sottile. Che quell' aria, la quale compressa mostrò pesare quanto quella rena, posta in libertà nel suo elemento, non sia più per pesare, ma sibben la rena, è cosa chiarissima: e però per far tale esperienza conveniva eleggere un luogo, e un mezzo, dove l'aria non men che la rena

potesse gravitare; perchè, come più volte si è detto, il mezzo detrae dal peso d'ogni materia, che vi s'immerge, tanto quanto è il peso d'altrettanta parte dell' istesso mezzo, quanto è la mole immersa; sicchè l'aria all'aria leva tutta la gravità: l'operazione dunque acciò fusse fatta esattamente, converrebbe farla nel vacuo, dove ogni grave eserciterebbe il suo momento senza diminuzione alcuna. Quando dunque, Sig. Simpl. noi pesassimo una porzione d'aria nel vacuo, resterete allora sincerato e assicurato del fatto?

*Simp.* Veramente sì; ma questo è un desiderare o richiedere l'impossibile.

*Salv.* E però grandissimo converrà che sia l'obbligo, che mi dovrete, qual volta per amor vostro io effettui un impossibile; ma io non voglio vendervi quel che già vi ho donato, perchè di già nell' addotta esperienza pesiamo noi l'aria nel vacuo, e non nell'aria, o in altro mezzo pieno. Che alla mole, Sig. Simp. che nel mezzo fluido s'immerge, venga dall' istesso mezzo detratto della gravità, ciò proviene, perchè ei resiste all' essere aperto, discacciato, e finalmente sollevato; segno di che ne dà la prontezza sua nel ricorrer subito a riempir lo spazio, che l'immensa mole in lui occupava, qualunque volta essa ne parta: che quando di tale immersione ei nulla sentisse, niente opererebbe egli contro di quella. Ora ditemi, mentre che voi avete

in aria il fiasco di già pieno della medesima aria naturalmente contenutavi, qual divisione, scacciamento, o in somma qual mutazione riceva l'aria esterna ambiente dalla seconda aria, che nuovamente s' infonde con forza nel vaso. Forse s' ingrandisce il fiasco, onde l' ambiente debba maggiormente ritirarsi per cedergli luogo? certo no; e però possiam dire, che la seconda aria non s' immerge nell' ambiente, non vi occupando ella spazio, ma è come se si mettesse nel vacuo; anzi pur vi si mette ella realmente, e si trappone nei vacui non ben ripieni della prima aria non condensata. E veramente non so conoscere differenza nessuna tra due costituzioni d'ambiente, mentre in questa l'ambiente niente preme l'ambito, ed in quella l'ambito punto non ispigne contro all' ambiente: e tali sono la locazione di qualche materia nel vacuo, e la seconda aria compressa nel fiasco. Il peso dunque, che si trova in tal' aria condensata, è quello che ella avrebbe liberamente sparso nel vacuo. Ben è vero che 'l peso della rena che la contrappesò, come quella che era nell'aria libera, nel vacuo sarebbe stato un poco più del giusto; e però convien dire, che l'aria pesata sia veramente alquanto men grave della rena che la contrappesò, cioè tanto quanto peserebbe altrettanta aria nel vacuo.

*Simpl.* Pur mi pareva che nell'addotte esperienze vi fusse qualche cosa da desiderare; ma ora mi quieto interamente.

*Salv.* Le cose da me fin qui prodotte ed in particolare questa che la differenza di gravità, benchè grandissima, non abbia parte veruna nel diversificare le velocità dei mobili, sicchè per quanto da quella dipende tutti si moverebbero con egual celerità, è tanto nuova e nella prima apprensione remota dal verisimile, che quando non si avesse modo di dilucidarla, e renderla più chiara che 'l Sole, meglio sarebbe il tacerla che 'l pronunciarla; però già che me la sono lasciata scappar di bocca, convien che io non lasci indietro esperienza o ragione che possa corroborarla.

*Sagr.* Non questa sola, ma molte altre insieme delle vostre proposizioni son così remote dalle opinioni e dottrine comunemente ricevute, che spargendosi in pubblico vi conciterebbero numero grande di contraddittori, essendo che l'innata condizione degli uomini non vede con buon occhio, che altri nel loro esercizio scuopra verità o falsità non scoperte da loro; e col dar titolo di innovatori di dottrine, poco grato agli orecchi di molti, s'ingegnano di tagliar quei nodi che non possono sciorre, e con mine sotterranee dissipar quegli edifizj che sono stati con gli strumenti consueti da pazienti artefici costrutti: ma con esso noi lontani da simili pretensioni l'esperienze vostre e le ragioni bastano a

quietarci: tuttavia quando abbiate altre più palpabili esperienze e ragioni più efficaci, le sentiremo molto volentieri.

*Salv.* L'esperienza fatta con due mobili quanto più si possa differenti di peso col fargli scendere da un' altezza per osservare se la velocità loro sia eguale, patisce qualche difficoltà, imperocchè se l'altezza sarà grande, il mezzo che dall' impeto del cadente dee essere aperto e lateralmente spinto, di molto maggior pregiudizio sarà al piccol momento del mobile leggerissimo, che alla violenza del gravissimo, per lo che per lungo spazio il leggero rimarrà indietro, e nell' altezza piccola si potrebbe dubitare, se veramente non vi fusse differenza, o pur se ve ne fusse, ma inosservabile. E però sono andato pensando di reiterar tante volte la scesa da piccole altezze, ed accumulare insieme tante di quelle minime differenze di tempo che potessero intercedere tra l'arrivo al termine del grave, e l'arrivo del leggero, che così congiunte facessero un tempo non solo osservabile, ma grandemente osservabile. In oltre per potermi prevalere di moti quanto si possa tardi, nei quali manco lavora la resistenza del mezzo in alterar l'effetto che dipende dalla semplice gravità, sono andato pensando di fare scendere i mobili sopra un piano declive non molto elevato sopra l'orizzontale, che sopra questo non meno che nel perpendicolo potrà scor-

gersi quello che facciano i gravi differenti di peso, e passando più avanti ho anco voluto liberarmi da qualche impedimento che potesse nascer dal contatto di essi mobili sul detto piano declive; e finalmente ho preso due palle, una di piombo, e una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciaschedunna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali lunghi quattro o cinque braccia legati ad alto, allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare gli ho dato l'andare nell' istesso momento, ed esse scendendo per le circonferenze di cerchi descritti dagli spaghi eguali lor semidiametri, e passate oltre al perpendicolo, son poi per le medesime strade ritornate indietro, e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate hanno sensatamente mostrato, come la grave va talmente sotto il tempo della leggera, che nè in ben cento vibrazioni, nè in mille anticipa il tempo d'un minimo momento; ma camminano con passo egualissimo. Scorgesi anco l'operazione del mezzo, il quale arrecando qualche impedimento al moto assai più diminuisce le vibrazioni del sughero, che quelle del piombo, ma non però che le renda più o meno frequenti, anzi quando gli archi passati dal sughero non fussero più che di cinque o sei gradi, e quei del piombo cinquanta o sessanta, son eglino passati sotto i medesimi tempi.

*Simpl.* Se questo è, come dunque non sarà la velocità del piombo maggiore della velocità del sughero? facendo quello sessanta gradi di viaggio nel tempo che questo ne passa appena sei.

*Salv.* Ma che direste, Sig. Simp. quando amendue spedissero nell' istesso tempo i loro viaggi, mentre il sughero allontanato dal perpendicolo trenta gradi avesse a passar l'arco di sessanta, e il piombo slargato dal medesimo punto di mezzo due soli gradi scorresse l'arco di quattro? non sarebbe allora altrettanto più veloce il sughero? e pur l'esperienza mostra ciò avvenire; però notate. Slargato il pendolo del piombo, v. g. cinquanta gradi dal perpendicolo; e di lì lasciato in libertà scorre, e passando oltre al perpendicolo quasi altri cinquanta descrive l'arco di quasi cento gradi, e ritornando per se stesso indietro descrive un altro minore arco, e continuando le sue vibrazioni dopo gran numero di quelle si riduce finalmente alla quiete. Ciascheduna di tali vibrazioni si fa sotto tempi eguali tanto quella di novanta gradi, quanto quella di cinquanta, o di venti, di dieci, di quattro: sicchè in conseguenza la velocità del mobile vien sempre languendo, poichè sotto tempi eguali va passando successivamente archi sempre minori, e minori. Un simile, anzi l' istesso effetto fa il sughero pendente da un filo altrettanto lungo, salvo che in minor numero di vi-

brazioni si conduce alla quiete, come meno atto mediante la sua leggerezza a superar l'ostacolo dell' aria: con tutto ciò tutte le vibrazioni grandi e piccole si fanno sotto tempi eguali tra di loro, ed eguali ancora ai tempi delle vibrazioni del piombo. Onde è vero, che se mentre il piombo passa un arco di cinquanta gradi, il sughero ne passa uno di dieci, il sughero allora è più tardo del piombo; ma accaderà ancora all' incontro che 'l sughero passi l'arco di cinquanta, quando il piombo passi quel di dieci, o di sei, e così in diversi tempi or sarà più veloce il piombo, ed ora il sughero; ma se gli stessi mobili passeranno ancora sotto i medesimi tempi eguali archi eguali, ben sicuramente si potrà dire allora essere le velocità loro eguali.

*Simp.* Mi pare e non mi pare che questo discorso sia concludente, e mi sento nella mente una tal qual confusione, che mi nasce dal muoversi e l'uno e l'altro mobile or veloce, or tardo, ed or tardissimo, che non mi lascia ridurre in chiaro come vero sia, che le velocità loro sian sempre eguali.

*Sagr.* Concedami in grazia, Sig. Salv. che io dica due parole. E ditemi, Sig. Simp. se voi ammettete che dir si possa con assoluta verità, le velocità del sughero e del piombo essere eguali, ogni volta che partendosi amendue nell'istesso momento dalla quiete e movendosi per le medesime incli-

nazioni passassero sempre spazj eguali in tempi eguali?

*Simp.* In questo non si può dubitare, nè se gli può contraddire.

*Sagr.* Accade ora nei pendoli, che ciaschedun di loro passi or sessanta gradi, or cinquanta, or trenta, or dieci, or otto, quattro, due, e quando amendue passano l'arco di sessanta gradi, lo passano nell' istesso tempo: nell' arco di cinquanta metton l'istesso tempo l'uno che l'altro mobile: così nell' arco di trenta, di dieci, e degli altri; e però si conclude che la velocità del piombo nell' arco di sessanta gradi è eguale alla velocita del sughero nell'arco medesimo di sessanta: e che le velocità nell'arco di cinquanta son pur tra loro eguali, e così negli altri. Ma non si dice già, che la velocità che si esercita nell' arco di sessanta, sia eguale alla velocità che si esercita nell'arco di cinquanta, nè questa a quella dell'arco di trenta, ma son sempre minori le velocità negli archi minori: il che si raccoglie dal veder noi sensatamente il medesimo mobile metter tanto tempo nel passar l'arco grande dei sessanta gradi, quanto nel passare il minor di cinquanta, o il minimo di dieci, ed in somma nell' esser passati tutti sempre sotto tempi eguali. È vero dunque che ben vanno e il piombo e il sughero ritardando il moto secondo la diminuzione degli archi, ma non però alterano la concordia loro nel mantener l' egualità

della velocità in tutti i medesimi archi da loro passati. Ho voluto dir questo più per sentire se ho ben capito il concetto del Sig. Salv. che per bisogno che io credessi che avesse il Sig. Simpl. di più chiara esplicazione di quella del Sig. Salv. che è, come in tutte le sue cose, lucidissima e tale, che sciogliendo egli il più delle volte questioni non solo in apparenza oscure, ma repugnanti alla natura ed al vero, con ragioni o osservazioni o esperienze tritissime e famigliari ad ogni uno, ha ( come da diversi ho inteso ) dato occasione a tale uno dei professori più stimati di far minor conto delle sue novità, tenendole come a vile, per dipendere da troppo bassi e popolari fondamenti, quasi che la più ammirabile e più da stimarsi condizione delle scienze dimostrative non sia lo scaturire e pullulare da principj notissimi, intesi e conceduti da tutti. Ma seguitiamo pur noi di andarci pascendo di questi cibi leggeri; e posto che il Sig. Simp. sia restato appagato nell'intender ed ammettere, come l'interna gravità dei diversi mobili non abbia parte alcuna nel diversificar le velocità loro, sicchè tutti, per quanto da quella dipende, si moverebber coll'istesse velocitadi; diteci, Sig. Salv. in quello che voi riponete le sensate ed apparenti diseguaglità di moto; e rispondete a quell' instanza che oppone il Sig. Simp. e che io parimente confermo,

dico del vedersi non solamente una palla di artiglieria muoversi più velocemente di una migliarola di piombo, che poca sarà la differenza di velocità rispetto a quella che vi oppongo io di mobili dell' istessa materia, dei quali alcuni dei maggiori scenderanno in meno di una battuta di polso in un mezzo quello spazio, che altri minori non lo passeranno in un' ora, nè in quattro, nè in venti, quali sono le pietre e la minuta rena e massime quella sottilissima, che intorbida l'acqua, nel qual mezzo in molte ore non iscende per due braccia, che pietruzze non molto grandi passano in una battuta di polso.

*Salv.* Quel che operi il mezzo nel ritardar più i mobili, secondo che tra di loro sono in ispecie men gravi, già si è dichiarato, mostrando ciò accadere dalla suttrazione di peso. Ma come il medesimo mezzo possa con sì gran differenza scemar la velocità nei mobili differenti solo in grandezza, ancorchè sieno della medesima materia e dell' istessa figura, ricerca per sua dichiarazione discorso più sottile di quello che basta per intender, come la figura del mobile più dilatata, o il moto del mezzo che sia fatto contro al mobile, ritarda la velocità di quello. Io del presente problema riduco la cagione alla scabrosità e porosità che comunemente, e per lo più necessariamente, si ritrova nelle superficie dei corpi solidi, le quali scabro-

sità nel moto di essi vanno urtando nell'aria, o altro mezzo ambiente; di che segno evidente ce ne porge il sentir noi ronzare i corpi, ancorchè quanto più si possa rotondati, mentre velocissimamente scorrono per l'aria, e non solo ronzare, ma sibilare, e fischiar si sentono se qualche più notabil cavità o prominenza sarà in essi. Vedesi anco nel girar sopra il torno ogni solido rotondo fare un poco di vento. Ma che più? non sentiam noi notabil ronzio, ed in tuono molto acuto farsi dalla trottola, mentre per terra con somma celerità va girando? l'acutezza del qual sibilo si va ingravendo, secondo che la velocità della vertigine va di grado in grado languendo: argomento parimente necessario degl' intoppi nell' aria delle scabrosità benchè minime delle superficie loro. Queste non si può dubitare che nello scendere i mobili, soffregandosi coll'ambiente fluido, apporteranno ritardamento alla velocità, e tanto maggiore, quanto la superficie sarà più grande, quale è quella dei solidi minori paragonati ai maggiori.

*Simpl.* Fermate in grazia, perchè qui comincio a confondermi: imperocchè sebbene io intendo ed ammetto che la confricazione del mezzo colla superficie del mobile ritardi il moto, e che più lo ritardi, dove ceteris paribus la superficie sia maggiore, non capisco però con qual fondamento voi chiamate maggiore la superficie

dei solidi minori: ed oltre a ciò, se come voi affermate, la maggior superficie dee arrecar maggior ritardamento, i solidi maggiori devriano esser più tardi, il che non è: ma questa instanza facilmente si toglie con dire, che sebbene il maggiore ha maggior superficie, ha anco maggior gravità, contro la quale l'impedimento della maggior superficie non ha a prevalere all' impedimento della superficie minore contro alla minor gravità, sicchè la velocità del solido maggiore ne divenga minore. E però non vedo ragione per la quale si debba alterare l'egualità delle velocità, mentre che quanto si diminuisce la gravità movente, altrettanto si diminuisce la facoltà della superficie ritardante.

*Salv.* Risolverò congiuntamente tutto quello che opponete. Per tanto voi, Sig. Simpl. senza controversia ammettete, che quando di due mobili eguali della stessa materia, e simili di figura (i quali indubitabilmente si moverebber egualmente veloci) all' uno di loro si diminuisse tanto la gravità quanto la superficie (ritenendo però la similitudine della figura), non perciò si scemerebbe la velocità nel rimpiccolito.

*Simpl.* Veramente parmi che così dovrebbe seguire, stando però nella nostra dottrina, che vuol che la maggior o minor gravità non abbia azione nell'accelerare o ritardare il moto.

*Salv.* E questo confermo io, e vi ammetto anco il vostro detto dal qual mi par che in conseguenza si ritragga, che quando la gravità si diminuisse più che la superficie, nel mobile in tal maniera diminuito si introdurrebbe qualche ritardamento di moto, e maggiore, e maggiore, quanto a proporzione maggior fusse la diminuzion del peso, che la diminuzion della superficie.

*Simp.* In ciò non ho io repugnanza veruna.

*Salv.* Or sappiate, Sig. Simplicio, che non si può nei solidi diminuir tanto la superficie, quanto il peso, mantenendo la similitudine delle figure. Imperocchè essendo manifesto che nel diminuir un solido grave tanto scema il suo peso quanto la mole, ogni volta che la mole venisse sempre diminuita più che la superficie ( nel conservarsi massime la similitudine di figura ) la gravità ancora più che la superficie verrebbe diminuita. Ma la Geometria c' insegna, che molto maggior proporzione è tra la mole, e la mole nei solidi simili, che tra le loro superficie. Il che per vostra maggior intelligenza vi esplicherò in qualche caso particolare. Però figuratevi per esempio un dado, un lato del quale sia v. gr. lungo due dita, sicchè una delle sue faccie sarà quattro dita quadre, e tutte e sei, cioè tutta la sua superficie, ventiquattro dita quadre. Intendete poi il medesimo dado esser con tre tagli segato in otto piccoli dadi, il lato di

ciascun de' quali sarà un dito, e una sua faccia un dito quadro, e tutta la sua superficie sei dita quadre, delle quali l'intero dado ne conteneva ventiquattro in superficie. Or vedete come la superficie del piccol dado è la quarta parte della superficie del grande (che tanto è sei di ventiquattro) ma l'istesso dado solido è solamente l'ottava; molto più dunque cala la mole, ed in conseguenza il peso, che la superficie. E se voi suddividerete il piccol dado in altri otto, avremo per l'intera superficie di un di questi un dito e mezzo quadro, che è la sedicesima parte della superficie del primo dado; ma la sua mole è solamente la sessantaquattresima. Vedete per tanto, come in queste sole due divisioni le moli scemano quattro volte più, che le loro superficie, e se noi andremo seguitando la suddivisione, sino che si riduca il primo solido in una minuta polvere, troveremo la gravità dei minimi atomi diminuita centinaja e centinaja di volte più, che le loro superficie. E questo, che vi ho esemplificato nei cubi, accade in tutti i solidi simili, le moli dei quali sono in sesquialtera proporzione delle lor superficie Vedete dunque con quanta maggior proporzione cresce l'impedimento del contatto della superficie del mobile col mezzo dei mobili piccoli, che nei maggiori; e se noi aggiugneremo, che le scabrosità nelle

superficie piccolissime delle polveri sottili non son forse minori di quelle delle superficie dei solidi maggiori, che sieno con diligenza puliti, guardate quanto bisognerà, che il mezzo sia fluido, e privo onninamente di resistenza all'esser aperto per dover cedere il passo a così debil virtù. E in tanto notate, Sig. Simp. che io non equivocai, quando poco fa dissi, la superficie de' solidi minori esser grande in comparazione di quella dei maggiori

*Simp.* Io resto interamente appagato; e mi credano certo, che se io avessi a ricominciare i miei studj, vorrei seguire il consiglio di Platone, e comincerei dalle Matematiche, le quali vedo, che procedono molto scrupolosamente, nè vogliono ammetter per sicuro fuor che quello, che concludentemente dimostrano.

*Sagr.* Ho avuto gusto grande in questo discorso; ma prima che passiamo più avanti, avrei caro di restar capace di un termine, che mi giunse nuovo, quando pure ora diceste, che i solidi simili son tra di loro in sesquialtera proporzione delle lor superficie, perchè ho ben veduto, e inteso la proposizione colla sua dimostrazione, nella quale si prova le superficie de' solidi simili essere in duplicata proporzione dei loro lati, e l'altra, che prova i medesimi solidi essere in tripla proporzione dei medesimi lati, ma la proporzione dei solidi colle lor superficie non mi

sovvien nè anco di averla sentita nominare.

*Salv.* V. S. medesima da per se si risponde, e dichiara il dubbio. Imperocchè quello, che è triplo di una cosa, della quale un altro è doppio, non viene egli ad esser sesquialtero di questo doppio? certo sì. Or se le superficie sono in doppia proporzione delle linee, delle quali i solidi sono in proporzione tripla, non possiam noi dire i solidi essere in sesquialtera proporzion delle superficie?

*Sagr.* Ho inteso benissimo. E sebbene alcuni altri particolari attenenti alla materia, di cui si tratta, mi resterebbero da domandare, tuttavia quando ce ne andassimo così di digressione in digressione, tardi verremmo alle quistioni principalmente intese, che appartengono alle diversità degli accidenti delle resistenze dei solidi all' esser spezzati; e però quando così piaccia loro, potremo ritornare sul primo filo, che si propose da principio.

*Salv.* V. S. dice molto bene, ma le cose tante, e tanto varie, che si sono esaminate, ci han rubato tanto tempo, che poco ce ne avanzerà per questo giorno da spendere nell' altro nostro principale argomento, che è pieno di dimostrazioni Geometriche da esser con attenzione considerate; onde stimerei, che fosse meglio differire il congresso a dimane, sì per questo, che ho detto, come ancora perchè

potrei portar meco alcuni fogli, dove ho per ordine notati i Teoremi, e i Problemi, nei quali si propongono, e dimostrano le diverse passioni di tal soggetto, che forse alla memoria col necessario metodo non mi sovverrebbero.

*Sagr.* Io molto bene mi accomodo a questo consiglio, e tanto più volentieri, quanto che per finire la sessione odierna avrò tempo di sentir la dichiarazione di alcuni dubbj, che mi restavano nella materia, che ultimamente trattavamo. Dei quali uno è, se si dee stimare, che l'impedimento del mezzo possa esser bastante a por termine all'accelerazione a' corpi di materia gravissima, grandissimi di mole, e di figura sferica; e dico sferica, per pigliar quella, che è contenuta sotto la minima superficie, e però meno soggetta al ritardamento. Un altro sarà circa le vibrazioni dei pendoli, e questo ha più capi; l'uno sarà se tutte, e grandi, e mediocri, e minime si fanno veramente, e precisamente sotto tempi eguali: ed un altro, qual sia la proporzione dei tempi dei mobili appesi a fili diseguali, dei tempi, dico, delle lor vibrazioni.

*Salv.* I quesiti son belli, e siccome avviene di tutti i veri, dubito, che trattandosi di qualsisia di loro si tirerà dietro tante altre vere, e curiose conseguenze, che non so, se l'avanzo di questo giorno ci basterà per discuterle tutte.

*Sagr.* Se elle saranno del sapore delle passate, più grato mi sarebbe l'impiegarmi tanti giorni, non che tante ore, quante restano sino a notte, e credo, che il Sig. Simplicio non si ristuccherà di tali ragionamenti.

*Simpl.* Sicuramente no, e massime quando si trattano quistioni naturali, intorno alle quali non si leggono opinioni, o discorsi di altri Filosofi.

*Salv.* Vengo dunque alla prima, affermando senza veruna dubitazione, non essere sfera sì grande, nè di materia sì grave, che la renitenza del mezzo, ancorchè tenuissimo, non raffreni la sua accelerazione, e che nella continuazion del moto non lo riduca all'equabilità, di che possiamo ritrar molto chiaro argomento dall'esperienza stessa. Imperocchè se alcun mobile cadente fosse abile nella sua continuazion di moto ad acquistar qualsivoglia grado di velocità, nessuna velocità, che da motore esterno gli fusse conferita, potrebbe esser così grande, che egli la ricusasse e se ne spogliasse mercè dell'impedimento del mezzo. E così una palla di artiglieria, che fosse scesa per aria, v. gr. quattro braccia, ed avesse per esempio acquistato dieci gradi di velocità, e che con questi entrasse nell'acqua, quando l'impedimento dell'acqua non fosse potente a vietare alla palla un tale impeto, ella l'accrescerebbe, o almeno lo continuerebbe sino al fondo, il che non si vede.

seguire, anzi l'acqua, benchè non fosse più che poche braccia profonda, l'impedisce, e debilita in modo, che leggerissima percossa farà nel letto del fiume, o del lago. È dunque manifesto, che quella velocità, della quale l'acqua l'ha potuta spogliare in un brevissimo viaggio, non glie lo lascerebbe giammai acquistare anco nella profondità di mille braccia. E perchè permettergli il guadagnarsela in mille, per levargliela poi in quattro braccia? Ma che più? non si vede egli l'immenso impeto della palla cacciata dall'istessa artiglieria esser talmente rintuzzato dall'interposizione di pochissime braccia di acqua, che senza veruna offesa della nave appena si conduce a percuoterla? L'aria ancora, benchè cedentissima, pur reprime la velocità del mobile cadente ancor molto grave, come possiamo con simili esperienze comprendere; perchè se dalla cima di una torre molto alta tireremo una archibusata in giù, questa farà minor botta in terra, che se scaricheremo l'archibuso alto dal piano solamente quattro, o sei braccia, segno evidente, che l'impeto, con che la palla uscì della canna scaricata nella sommità della torre, andò diminuendosi nello scender per aria; adunque lo scender da qualunque grandissima altezza non basterà per fargli acquistare quell'impeto, del quale la resistenza dell'aria la priva, quando già in qualsivoglia modo gli sia

stato conferito. La rovina parimente, che farà in una muraglia un colpo di una palla cacciata da una colubrina dalla lontananza di venti braccia, non credo io, che la facesse venendo a perpendicolo da qualsivoglia altezza immensa. Stimo per tanto esser termine all' accelerazione di qualsivoglia mobile naturale, che dalla quiete si parta, e che l' impedimento del mezzo finalmente lo riduca all' egualità, nella quale ben poi sempre si mantenga.

*Sagr.* L' esperienze veramente mi par che sieno molto a proposito; nè ci è altro, se non che l'avversario potrebbe farsi forte col negar, che si debbono verificar nelle moli grandissime, e gravissime, e che una palla di artiglieria venendo dal concavo della Luna, o anco dalla suprema region dell' aria farebbe percossa maggiore, che uscita dal cannone.

*Salv.* Non è dubbio, che molte cose si possono opporre, e che non tutte si possono con esperienza redarguire, tuttavia in questa contraddizione alcuna cosa par, che si possa mettere in considerazione; cioè, che molto ha del verisimile, che il grave cadente da un' altezza acquisti tanto d' impeto nell' arrivare in terra, quanto fosse bastante a tirarlo a quell' altezza, come chiaramente si vede in un pendolo assai grave, che slargato cinquanta, o sessanta gradi dal perpendicolo guadagna quella velocità, e virtù, che basta

precisamente a sospignerlo ad altrettanta elevazione, trattone però quel poco, che gli vien tolto dall' impedimento dell' aria. Per costituir dunque la palla dell' artiglieria in tanta altezza, che bastasse per l' acquisto di tanto impeto, quanto è quello, che gli dà il fuoco nell' uscir del Pezzo, dovrebbe bastare il tirarla in su a perpendicolo coll' istessa artiglieria, osservando poi se nella ricaduta ella facesse colpo eguale a quello della percossa fatta da vicino nell' uscire; che credo veramente che non sarebbe a gran segno tanto gagliardo. E però stimo, che la velocità, che ha la palla vicino all' uscita del Pezzo, sarebbe di quelle, che l' impedimento dell' aria non gli lascerebbe conseguire giammai, mentre con moto naturale scendesse partendosi dalla quiete da qualsivoglia grand' altezza. Vengo ora agli altri quesiti attenenti ai pendoli, materia che a molti parrebbe assai arida, e massime a quei Filosofi, che stanno continuamente occupati nelle più profonde questioni delle cose naturali, tuttavia non gli voglio disprezzare, inanimito dall' esempio d' Aristotile medesimo, nel quale io ammiro sopra tutte le cose il non aver egli lasciato, si può dir, materia alcuna degna in qualche modo di considerazione, che e' non abbia toccata: ed ora dai quesiti di V. S. penso, che potrò dirvi qualche mio pensiero sopra alcuni problemi attenenti alla

musica, materia nobilissima, della quale hanno scritto tanti grand' uomini, e l' istesso Aristotile, e circa di essa considera molti problemi curiosi, talchè se io ancora da così facili, e sensate esperienze trarrò ragioni di accidenti maravigliosi in materia dei suoni, posso sperare, che i miei ragionamenti siano per esser graditi da voi.

*Sagr.* Non solamente graditi, ma da me in particolare sommamente desiderati, come quello che sendomi dilettato di tutti gli strumenti musici, ed assai filosofato intorno alle consonanze, son sempre restato incapace, e perplesso, onde avvenga, che più mi piaccia, e diletti questa, che quella, e che alcuna non solo non mi diletti, ma sommamente mi offenda. Il problema poi trito delle due corde tese all' unisono, che al suono dell' una l'altra si muova, e attualmente risuoni, mi resta ancora irresoluto, come anco non ben chiare le forme delle consonanze, ed altre particolarità

*Salv.* Vedremo, se da questi nostri pendoli si possa cavare qualche soddisfazione a tutte queste difficoltà. E quanto al primo dubbio, che è, se veramente, e puntualissimamente l' istesso pendolo fa tutte le sue vibrazioni massime, mediocri, e minime sotto tempi precisamente uguali, io mi rimetto a quello, che intesi già dal nostro Accademico, il quale dimostra be-

ne, che il mobile, che discendesse per le corde suttese a qualsivoglia arco, le passerebbe necessariamente tutte in tempi eguali tanto la suttesa sotto cent' ottanta gradi (cioè tutto il diametro) quanto le suttese di cento, di sessanta, di due, di mezzo, e di quattro minuti: intendendo che tutte vadano a terminar nell' infimo punto toccante il piano orizzontale. Circa poi i discendenti per gli archi delle medesime corde elevati sopra l' orizzonte, e che non sieno maggiori d' una quarta, cioè, di novanta gradi, mostra parimente l' esperienza passarsi tutti in tempi eguali, ma però più brevi dei tempi de' passaggi per le corde; effetto che in tanto ha del maraviglioso, in quanto nella prima apprensione par che dovrebbe seguire il contrario. Imperocchè sendo comuni i termini del principio, e del fine del moto, ed essendo la linea retta la brevissima, che tra i medesimi termini si comprende, par ragionevole, che il moto fatto per lei s'avesse a spedire nel più breve tempo, il che poi non è: ma il tempo brevissimo, ed in conseguenza il moto velocissimo è quello, che si fa per l' arco, del quale essa linea retta è corda. Quanto poi alla proporzione dei tempi delle vibrazioni di mobili pendenti da fila di differente lunghezza, sono essi tempi in proporzione suddupla delle lunghezze delle fila, o vogliamo dire le lunghezze essere in dup

cata proporzion dei tempi, cioè, son come i quadrati dei tempi: sicchè volendo v. gr. che 'l tempo d' una vibrazione d' un pendolo sia doppio del tempo d' una vibrazione d' un altro, bisogna, che la lunghezza della corda di quello sia quadrupla della lunghezza della corda di questo. Ed allora nel tempo d' una vibrazione di quello, un altro ne farà tre, quando la corda di quello sarà nove volte più lunga dell'altra. Dal che ne seguita, che le lunghezze delle corde hanno fra di loro la proporzione, che hanno i quadrati de' numeri delle vibrazioni, che si fanno nel medesimo tempo.

*Sagr.* Adunque se io ho bene inteso, potrò speditamente sapere la lunghezza di una corda pendente da qualsivoglia grandissima altezza, quando bene il termine sublime dell' attaccatura mi fosse invisibile, e solo si vedesse l'altro estremo basso. Imperocchè se io attaccherò qui da basso uno assai grave peso a detta corda, e farò che si vada vibrando in qua, e in là, e che un amico vada numerando alcune delle sue vibrazioni, e che io nell'istesso tempo vada parimente contando le vibrazioni, che farà un altro mobile appeso a un filo di lunghezza precisamente d'un braccio, dai numeri delle vibrazioni di questi pendoli, fatte nell'istesso tempo, troverò la lunghezza della corda, come per esempio ponghiamo, che nel tempo, che

l'amico mio abbia contate venti vibrazioni della corda lunga, io ne abbia contate dugenquaranta del mio filo, che è lungo un braccio, fatto i quadrati delli due numeri venti, e dugenquaranta, che sono 400. 57600 dirò la lunga corda contener 57600 misure di quelle, che il mio filo ne contien 400; e perchè il filo è un sol braccio, partirò 57600 per 400, che ne viene 144, e 144 braccia dirò esser lunga quella corda.

*Salv.* Nè v' ingannerete d' un palmo, e massime se piglierete moltitudini grandi di vibrazioni.

*Sagr.* V. S. mi dà pur frequentemente occasione d' ammirare la ricchezza, ed insieme la somma liberalità della natura, mentre da cose tanto comuni, e direi anco in certo modo vili, ne andate traendo notizie molto curiose, e nuove, e bene spesso remote da ogni immaginazione. Io ho ben mille volte posto cura alle vibrazioni in particolare delle lampade pendenti in alcune Chiese da lunghissime corde, inavvertentemente state mosse da alcuno, ma il più che io cavassi da tale osservazione fu l' improbabilità dell' opinione di quelli, che vogliono, che simili moti vengano mantenuti, e continuati dal mezzo, cioè dall' aria; perchè mi parrebbe bene, che l' aria avesse un gran giudizio, ed insieme una poca faccenda a consumar le ore, e le ore di tempo in sospignere con tanta regola in qua, e in là un peso pendente:

ma che io fossi per apprenderne, che quel mobile medesimo appeso a una corda di cento braccia di lunghezza, slontanato dall' imo punto una volta novanta gradi, ed un' altra un grado solo, o mezzo, tanto tempo spendesse in passar questo minimo, quanto in passar quel massimo arco, certo non credo, che mai l'avrei incontrato, che ancora ancora mi par, che tenga dell' impossibile. Ora sto aspettando di sentire, che queste medesime semplicissime minuzie mi assegnino ragioni tali di quei problemi musici, che mi possano almeno in parte quietar la mente.

*Salv.* Prima d'ogni altra cosa bisogna avvertire, che ciascheduu pendolo ha il tempo delle sue vibrazioni talmente limitato, e prefisso, che impossibil cosa è il farlo muovere sotto altro periodo, che l'unico suo naturale. Prenda pur chi si voglia in mano la corda, oud è attaccato il peso, e tenti quanto gli piace d' accrescergli, o scemargli la frequenza delle sue vibrazioni, sarà fatica buttata in vano; ma ben all'incontro ad un pendolo, ancorchè grave, e posto in quiete, col solo soffiarvi dentro conferiremo noi moto, e moto anche assai grande col reiterare i soffi, ma sotto il tempo, che è proprio quel delle sue vibrazioni; che se al primo soffio l'avremo rimosso dal perpendicolo mezzo dito, aggiugnendogli il secondo dopo che sendo ritornato verso noi comincerebbe la seconda

vibrazione, gli conferiremo nuovo moto, e così successivamente con altri soffi, ma dati a tempo, e non quando il pendolo ci viene incontro (che così gl' impediremo, e non ajuteremo il moto) e seguendo con molti impulsi gli conferiremo impeto tale, che maggior forza assai, che quella d' un soffio ci bisognerà a cessarlo.

*Sagr.* Ho da fanciullo osservato con questi impulsi dati a tempo un uomo solo far suonare una grossissima campana, e nel volerla poi fermare attaccarsi alla corda quattro, o sei altri, e tutti esser levati in alto, nè poter tanti insieme arrestar quell' impeto, che un solo con regolati tratti gli aveva conferito.

*Salv.* Esempio, che dichiara il mio intento non meno acconciamente di quel, che questa mia premessa si accomodi a render la ragione del maraviglioso problema della corda della Cetera, o del Cimbalo, che muove, e fa realmente suonare quella non solo, che all' unisono gli è concorde, ma anco all' ottava, e alla quinta. Toccata la corda comincia, e continua le sue vibrazioni per tutto il tempo, che si sente durar la sua risonanza: queste vibrazioni fanno vibrare, e tremare l' aria, che gli è appresso, i cui tremori, e increspamenti si distendono per grande spazio, e vanno a urtare in tutte le corde del medesimo strumento, ed anco di altri vicini: la corda, che è tesa all' unisono colla tocca, essendo disposta a far

le sue vibrazioni sotto il medesimo tempo, comincia al primo impulso a muoversi un poco, e sopraggiugnendogli il secondo, il terzo, il ventesimo, e più altri, e tutti negli aggiustati, e periodici tempi, riceve finalmente il medesimo tremore, che la prima tocca, e si vede chiarissimamente andar dilatando le sue vibrazioni giusto allo spazio della sua motrice. Quest'ondeggiamento, che si va distendendo per l'aria, muove e fa vibrare non solamente le corde, ma qualsivoglia altro corpo disposto a tremare, e vibrarsi sotto quel tempo della tremante corda: sicchè se si ficcheranno nelle sponde dello strumento diversi pezzetti di setole, o di altre materie flessibili, si vedrà nel suonare il Cimbalo tremare or questo, or quel corpuscolo, secondo che verrà toccata quella corda, le cui vibrazioni van sotto 'l medesimo tempo: gli altri non si muoveranno al suono di questa corda, nè quello tremerà al suono d'altra corda. Se coll'archetto si toccherà gagliardamente una corda grossa d'una Viola, appressandogli un bicchiere di vetro sottile, e pulito, quando il tuono della corda sia all'unisono del tuono del bicchiere, questo tremerà, e sensatamente risuonerà. Il diffondersi poi amplamente l'increspamento del mezzo intorno al corpo risuonante, apertamente si vede nel far suonare il bicchiere, dentro il quale sia dell'acqua, fregando il pol-

pastrello del dito sopra l'orlo; imperocchè l'acqua contenuta con regolatissimo ordine si vede andare ondeggiando, e meglio ancora si vedrà l'istesso effetto fermando il piede dal bicchiere nel fondo di qualche vaso assai largo, nel quale sia dell' acqua sin presso all' orlo del bicchiere, che parimente facendolo risuonare colla confricazione del dito, si vedranno gl' increspamenti nell'acqua regolatisssimi, e con gran velocità spargersi in gran distanza intorno al bicchiere, ed io più volte mi sono incontrato, nel fare al modo detto suonare un bicchiere assai grande, e quasi pieno d'acqua, a veder prima le onde nell'acqua con estrema egualità formate; ed accadendo talvolta, che il tuono del bicchiere salti un'ottava più alto, nell' istesso momento ho visto ciascheduna delle dette onde dividersi in due: accidente che molto chiaramente conclude la forma dell'ottava esser la dupla.

*Sagr.* A me ancora è intervenuto l'istesso più d'una volta con mio diletto, ed anco utile; imperocchè stetti lungo tempo perplesso intorno a queste forme delle consonanze, non mi parendo, che la ragione, che comunemente se n'adduce dagli autori, che sin qui hanno scritto dottamente della musica, fusse concludente a bastanza. Dicono essi la Diapason, cioè l'ottava esser contenuta dalla dupla, la Diapente, che noi diciamo la quinta, dalla sesquial-

tera, perchè distesa sopra il Monocordo una corda, sonandola tutta, e poi sonandone la metà col mettere un ponticello in mezzo, si sente l' ottava, e se il ponticello si metterà al terzo di tutta la corda, toccando l' intera, e poi li due terzi ci rende la quinta, per lo che l'ottava dicono esser contenuta tra 'l due, e l' uno, e la quinta tra li tre, e 'l dua. Questa ragione, dico, non mi pareva concludente per poter assegnare juridicamente la dupla, e la sesquialtera per forme naturali della Diapason, e della Diapente. E 'l mio motivo era tale. Tre sono le maniere, colle quali noi possiamo inacutire il tuono a una corda, l' una è lo scorciarla, l' altra il tenderla più, o vogliam dir tirarla, il terzo è l' assottigliarla. Ritenendo la medesima tiratezza, e grossezza della corda, se vorremo sentir l' ottava, bisogna scorciarla la metà, cioè toccarla tutta, e poi mezza. Ma se ritenendo la medesima lunghezza, e grossezza vorremo farla montare all' ottava col tirarla più, non basta tirarla il doppio più, ma ci bisogna il quadruplo, sicchè se prima era tirata dal peso d' una libbra, converrà attaccarvene quattro per inacutirla all' ottava. E finalmente se stante la medesima lunghezza, e tiratezza, vorremo una corda, che per esser più sottile renda l' ottava, sarà necessario, che ritenga solo la quarta parte della grossezza dell' altra più grave. E questo, che dico

dell'ottava, cioè che la sua forma presa dalla tensione, o dalla grossezza della corda è in duplicata proporzione di quella, che si ha dalla lunghezza, intendasi di tutti gli altri intervalli musici, imperocchè quello, che ci dà la lunghezza colla proporzion sesquialtera, cioè col suonarla tutta, e poi li due terzi, volendolo cavar dalla tiratezza, o dalla sottigliezza, bisogna duplicar la proporzione sesquialtera pigliando la dupla sesquiquarta, e se la corda grave era tesa da quattro libbre di peso, attaccarne all'acuta non sei, ma nove, e quanto alla grossezza, far la corda grave più grossa dell'acuta secondo la proporzione di nove a quattro per aver la quinta. Stante queste verissime esperienze, non mi pareva scorger ragione alcuna, per la quale avessero i sagaci Filosofi a stabilir la forma dell'ottava esser più la dupla, che la quadrupla, e della quinta più la sesquialtera, che la dupla sesquiquarta. Ma perchè il numerare le vibrazioni d'una corda, che nel render la voce le fa frequentissime, è del tutto impossibile, sarei restato sempre ambiguo, se vero fosse, che la corda dell'ottava più acuta facesse nel medesimo tempo doppio numero di vibrazioni di quelle della più grave, se le onde permanenti, per quanto tempo ci piace, nel far suonare, e vibrare il bicchiere, non m'avessero sensatamente mostrato, come nell'istesso momento, che al-

cuna volta si sente il tuono saltare all'ottava, si vedono nascere altre onde più minute, le quali con infinita pulitezza tagliano in mezzo ciascuna di quelle prime.

*Salv.* Bellissima osservazione per poter distinguere ad una ad una le onde nate dal tremore del corpo, che risuona, che son poi quelle, che diffuse per l'aria vanno a far la titillazione su'l timpano del nostro orecchio, la quale nell'anima ci diventa suono. Ma dove che il vederle, ed osservarle nell'acqua non dura, se non quanto si continua la confricazion del dito, ed anco in questo tempo non sono permanenti, ma continuamente si fanno, e si dissolvono, non sarebbe bella cosa, quando se ne potesse far con grand'esquisitezza di quelle, che restassero lungo tempo, dico mesi, ed anni, sicchè desse comodità di poterle misurare, ed agiatamente numerare?

*Sagr.* Veramente io stimerei sommamente una tale invenzione.

*Salv.* L'invenzione fu del caso, e mia fu solamente l'osservazione, e il far di essa capitale, e stima, come di riprova di nobil contemplazione, ancorchè fattura in se stessa assai vile Raschiando con uno scarpello di ferro tagliente una piastra di ottone per levarle alcune macchie, nel muovervi sopra lo scarpello con velocità sentii una volta, e due, tra molte

strisciate, fischiare, e uscirne un sibilo molto gagliardo, e chiaro, e guardando sopra la piastra, vidi un lungo ordine di virgolette sottili tra di loro parallele, e per egualissimi intervalli l' una dall' altra distanti. Tornando a raschiar di nuovo più e più volte mi accorsi, che solamente nelle raschiate, che fischiavano, lasciava lo scarpello le intaccature sopra la piastra, ma quando la strisciata passava senza sibilo, non restava pur minima ombra di tali virgolette. Replicando poi altre volte lo scherzo, strisciando ora con maggiore, ed ora con minore velocità, il sibilo riusciva di tuono or più acuto, ed or più grave, ed osservai i segni fatti nel suono più acuto esser più spessi, e quelli del più grave più radi, e talora ancora secondo che la strisciata medesima era fatta verso il fine con maggiore velocità, che nel principio, si sentiva il suono andarsi inacutendo, e le virgolette si vedeva essere andate inspessendosi, ma sempre con estrema lindura, e con assoluta equidistanza segnate; ed oltre a ciò nelle strisciate sibilanti sentiva tremarmi il ferro in pugno, e per la mano scorrermi certo rigore. Ed in somma si vede, e sente fare al ferro quello per appunto, che facciamo noi nel parlar sotto voce, e nell' intonar poi il suono gagliardo, che mandando fuora il fiato senza formare il suono non sentiamo nella gola, e nella bocca farsi movimento alcuno, ri-

spetto però, ed in comparazione del tremor grande, che sentiamo farsi nella laringe, ed in tutte le fauci nel mandar fuora la voce, e massime in tuono grave, e gagliardo. Ho anco talvolta tra le corde del Cimbalo notatone due unisone alli due sibili fatti strisciando al modo detto, e di più differenti di tuono, dei quali due precisamente distavano per una quinta perfetta, e misurando poi gl' intervalli delle virgolette dell' una, e dell' altra strisciata si vedeva la distanza, che conteneva quarantacinque spazj dell'una, contenere trenta dell'altra; quale veramente è la forma, che si attribuisce alla Diapente. Ma qui prima chè passare più avanti, voglio avvertirvi, che delle tre maniere d' inacutire il suono, quella, che voi riferite alla sottigliezza della corda, con più verità dee attribuirsi al peso. Imperocchè l' alterazione presa dalla grossezza risponde, quando le corde sieno della medesima materia, e così una minugia per far l' ottava dee esser più grossa quattro volte dell' altra pur di minugia; ed una di ottone più grossa quattro volte di un'altra di ottone. Ma se io vorrò far l' ottava con una di ottone ed una di minugia, non si ha da ingrossar quattro volte, ma sibben farla quattro volte più grave, sicchè quanto alla grossezza questa di metallo non sarà altrimenti quattro volte più grossa, ma ben quadrupla in gravità, che talvolta sarà più sottile, che la sua ri-

spondente all' ottava più acuta, che sia di minugia. Onde accade, che incordandosi un Cimbalo di corde di oro, ed un altro di ottone, se saranno della medesima lunghezza, grossezza, e tensione, per essere l'oro quasi il doppio più grave, riuscirà l'accordatura circa una quinta più grave. E qui notisi, come alla velocità del moto più resiste la gravità del mobile, che la grossezza, contro a quello, che a prima fronte altri giudicherebbe; che ben pare, che ragionevolmente più dovesse esser ritardata la velocità dalla resistenza del mezzo all' esser aperto in un mobile grosso, e leggero, che in uno grave, e sottile; tuttavia in questo caso accade tutto l'opposito. Ma seguitando il primo proposito, dico, che non è la ragion prossima, ed immediata delle forme degl' intervalli musici la lunghezza delle corde, non la tensione, non la grossezza, ma sibben la proporzione dei numeri delle vibrazioni, e percosse dell' onde dell' aria, che vanno a ferire il timpano del nostro orecchio, il quale esso ancora sotto le medesime misure di tempi vien fatto tremare. Fermato questo punto potremo per avventura assegnare assai congrua ragione, onde avvenga che di essi suoni differenti di tuono alcune coppie sieno con gran diletto ricevute dal nostro sensorio, altre con minore, ed altre ci feriscano con grandissima molestia, che è il cercar la ragione delle consonan-

ze più, o men perfette, e delle dissonanze La molestia di queste nascerà, credo io, dalle discordi pulsazioni di due diversi tuoni, che sproporzionatamente colpeggiano sopra il nostro timpano, e crudissime saranno le dissonanze, quando i tempi delle vibrazioni fussero innumerabili, per una delle quali sarà quella, quando di due corde unisone se ne suoni una con tal parte dell'altra, quale è il lato del quadrato del suo diametro: dissonanza simile al tritono, o semidiapente. Consonanti, e con diletto ricevute saranno quelle coppie di suoni, che verranno a percuotere con qualche ordine sopra il timpano; il quale ordine ricerca prima, che le percosse fatte dentro all'istesso tempo sieno commensurabili di numero, acciocchè la cartilagine del timpano non abbia a stare in un perpetuo tormento d'inflettersi in due diverse maniere per acconsentire, e ubbidire alle sempre discordi battiture. Sarà dunque la prima, e più grata consonanza l'ottava, essendo che per ogni percossa, che dia la corda grave su il timpano, l'acuta ne dà due; talchè amendue vanno a ferire unitamente in una sì, e nell'altra no delle vibrazioni della corda acuta; sicchè di tutto il numero delle percosse la metà si accordano a battere unitamente, ma i colpi delle corde unisone giungon sempre tutti insieme, e però son come di una corda sola, nè fanno con-

sonanza. La quinta diletta ancora, attesochè per ogni due pulsazioni della corda grave l'acuta ne dà tre, dal che ne seguita, che numerando le vibrazioni della corda acuta, la terza parte di tutte si accordano a battere insieme; cioè due solitarie s' interpongono tra ogni coppia delle concordi; e nella Diatessaron se n' interpongon tre. Nella seconda, cioè nel tuono sesquiottavo per ogni nove pulsazioni una sola arriva concordemente a percuotere coll'altra della corda più grave, tutte le altre sono discordi, e con molestia ricevute su il timpano, e giudicate dissonanti dall' udito.

*Simp.* Vorrei con maggior chiarezza spiegato questo discorso.

*Salv.* Sia questa linea A B (Fig. XIII.) lo spazio, e la dilatazione di una vibrazione della corda grave: e la linea C D quella della corda acuta, la quale coll' altra renda l' ottava, e dividasi la A B in mezzo in E. È manifesto, che cominciando a muoversi le corde nei termini A, C, quando la vibrazione acuta sarà pervenuta al termine D, l'altra si sarà distesa solamente sino al mezzo E, il quale non sendo termine del moto, non percuote: ma bensì fa colpo in D Ritornando poi la vibrazione dal D in C, l'altra passa da E in B, onde le due percosse di B, e di C battono unitamente su il timpano: e tornando a reiterarsi le simili

seguenti vibrazioni, si concluderà alternatamente in una sì, e nell'altra no delle vibrazioni C D accadere l'unione delle percosse con quelle di A B: ma le pulsazioni dei termini hanno sempre per compagne una delle C, D, e sempre la medesima; il che è manifesto, perchè posto, che A, C battano insieme, nel passar A in B, C va in D, e torna in C, sicchè i colpi A, C si fanno insieme. Ma sieno ora le due vibrazioni A B, C D quelle, che producono la Diapente, i tempi delle quali sono in proporzion sesquialtera, e dividasi la A B della corda grave in tre parti eguali in E, O, E intendasi le vibrazioni cominciare nell'istesso momento dai termini A, C; è manifesto, che nella percossa, che si farà nel termine D, la vibrazione di A B sarà giunta solamente in O, il timpano dunque riceve la percossa D sola: nel ritorno poi da D in C, l'altra vibrazione passa da O in B, e ritorna in O, facendo la pulsazione in B, che pure è sola, e dicontrattempo ( accidente da considerarsi ) perchè avendo noi posto le prime pulsazioni fatte nell'istesso momento nei termini A, C, la seconda, che fu sola del termine D si fece dopo, quanto importa il tempo del transito C D, cioè A O, ma la seguente, che si fa in B dista dall'altra solo, quanto è il tempo di O B, che è la metà; continuando poi il ritorno da O in A, men-

tre da C si va in D, si viene a far le due pulsazioni unitamente in A, e D. Seguono poi altri periodi simili a questi, cioè coll' interposizione di due pulsazioni della corda acuta scompagnate, e solitarie, e una della corda grave pur solitaria, e interposta tra le due solitarie dell' acuta. Sicchè se noi figureremo il tempo diviso in momenti, cioe in minime particole eguali; posto che nei due primi, dalle concordi pulsazioni fatte in A, C si passi in O, D, e in D si batta: che nel terzo, e quarto momento ritorni da D in C battendo in C, e che da O si passi per B, e si torni in O battendosi in B, e che finalmente nel quinto, e sesto momento da O, e C, si passi in A, e D battendo in amendue, avremo sopra il timpano le pulsazioni distribuite con tale ordine, che poste le pulsazioni delle due corde nel medesimo instante, due momenti dopo riceverà una percossa solitaria, nel terzo momento un' altra pur solitaria, nel quarto un' altra sola, e due momenti dopo, cioè nel sesto due congiunte insieme: e qui finisce il periodo, e per dir così, l' anomalia, il qual periodo si và poi più volte replicando.

*Sagr.* Io non posso più tacere, è forza, che io esclami il gusto, che sento nel vedermi tanto adequatamente rendute ragioni di effetti, che tanto tempo mi hanno tenuto in tenebre, e cecità. Ora in-

tendo, perchè l'unisono non differisce punto da una voce sola: intendo perchè l'ottava è la principal consonanza, ma tanto simile all'unisono, che come unisono si perde, e si accompagna colle altre: simile è all'unisono, perchè dove le pulsazioni delle corde unisone vanno a ferire tutte insieme sempre, queste della corda grave dell'ottava vanno tutte accompagnate da quelle dell'acuta, e di queste una s'interpone solitaria, ed in distanze eguali, ed in certo modo senza fare scherzo alcuno, onde tale consonanza ne diviene sdolcinata troppo, e senza brio. Ma la quinta con quei suoi contrattempi, e coll'interpor tra le coppie delle due pulsazioni congiunte, due solitarie della corda acuta, ed una pur solitaria della grave, e queste tre con tanto intervallo di tempo, quanto è la metà di quello, che è tra ciascuna coppia, e le solitarie dell'acuta, fa una titillazione, ed un solletico tale sopra la cartilagine del timpano, che temperando la dolcezza con uno spruzzo di acrimonia par che insieme soavemente baci, e morda.

*Salv.* È forza, poichè vedo che V. S. gusta tanto di queste novellizie, che io gli mostri il modo, col quale l'occhio ancora, non pur l'udito possa ricrearsi nel vedere i medesimi scherzi, che sente l'udito. Sospendete palle di piombo, o altri simili gravi da tre fili di lunghezze diver-

se, ma tali, che nel tempo, che il più lungo fa due vibrazioni il più corto ne faccia quattro, e il mezzano tre, il che accaderà quando il più lungo contenga sedici palmi, o altre misure, delle quali il mezzano ne contenga nove, ed il minore quattro; e rimossi tutti insieme dal perpendicolo, e poi lasciatigli andare si vedrà un intrecciamento vago di essi fili con incontri varj, ma tali, che ad ogni quarta vibrazione del più lungo tutti tre arriveranno al medesimo termine unitamente, e da quello poi si partiranno reiterando di nuovo l' istesso periodo: la qual mistione di vibrazioni è quella, che fatta dalle corde rende all' udito l' ottava colla quinta in mezzo. E se con simile disposizione si andranno temperando le lunghezze di altri fili, sicchè le vibrazioni loro rispondano a quelle di altri intervalli musici, ma consonanti, si vedranno altri, ed altri intrecciamenti, e sempre tali, che in determinati tempi, e dopo determinati numeri di vibrazioni tutti i fili ( sieno tre, o sieno quattro ) si accordano a giugner nell' istesso momento al termine di loro vibrazioni, e di lì a cominciare un altro simil periodo. Ma quando le vibrazioni di due, o più fili sieno, o incommensurabili, sicchè mai non ritornino a terminar concordemente determinati numeri di vibrazioni, o se pur non essendo incommensu-

rabili, vi ritornano dopo lungo tempo, e dopo gran numero di vibrazioni, allora la vista si confonde nell' ordine disordinato di sregolata intrecciatura, e l' udito con noja riceve gli appulsi intemperati de' tremori dell' aria, che senza ordine, o regola vanno a ferire sul timpano.

Ma dove, Signori miei, ci siamo lasciati trasportare per tante ore dai varj Problemi, ed inopinati discorsi? Siamo giunti a sera, e della proposta materia abbiamo trattato pochissimo, o niente, anzi ce ne siamo in modo disviati, che appena mi sovviene della prima introduzione, e di quel poco ingresso, che facemmo come ipotesi, e principio delle future dimostrazioni.

*Sagr.* Sarà dunque bene, che ponghiamo per oggi fine ai nostri ragionamenti, dando comodo alla mente di andarsi nel riposo della notte tranquillando, per tornar poi domani ( quando piaccia a V. S. di favorirci ) ai discorsi desiderati, e principalmente intesi.

*Salv.* Non mancherò d' esser qua alla istessa ora di oggi a servirle, e goderle.

*Finisce la prima Giornata.*

# GIORNATA SECONDA

*Sag.* Stavamo il Sig. Simplicio, ed io aspettando la venuta di V. S. e nel medesimo tempo ci andavamo riducendo a memoria l' ultima considerazione, che quasi come principio, e supposizione delle conclusioni, che V. S. intendeva di dimostrarci, fu circa quella resistenza, che hanno tutti i corpi solidi all' esser rotti, dipendente da quel glutine, che tiene le parti attaccate e congiunte, sicchè non senza una potente attrazione cedono, e si separano. Si andò poi cercando, qual potesse esser la causa di tal coerenza, che in alcuni solidi è gagliardissima, proponendosi principalmente quella del vacuo, che fu poi cagione di tante digressioni, che ci

tennero tutta la giornata occupati, e lontani dalla materia primieramente intesa, che era la contemplazione delle resistenze dei solidi all'essere spezzati.

*Salv.* Ben mi sovviene del tutto, e ritornando sul filo incominciato: Posta qualunque ella sia la resistenza dei corpi solidi all'essere spezzati per una violenta attrazione, basta che indubitabilmente ella in loro si trova, la quale benchè grandissima contro alla forza di chi per diritto gli tira, minore per lo più si osserva nel violentargli per traverso, e così vediamo una verga, per esempio, d'acciajo, o di vetro, reggere per lo lungo il peso di mille libbre, che fitta a squadra in un muro si spezzerà coll'attaccargliene cinquanta solamente. E di questa seconda resistenza dobbiamo noi parlare, ricercando secondo quali proporzioni ella si ritrovi nei prismi, e cilindri simili o dissimili in figura, lunghezza, e grossezza, essendo però dell'istessa materia. Nella quale specolazione io piglio come principio noto quello, che nelle meccaniche si dimostra tra le passioni del Vette, che noi chiamiamo Leva, cioè, che nell'uso della Leva la forza alla resistenza ha la proporzion contraria di quella, che hanno le distanze, tra'l sostegno, e le medesime forza, e resistenza.

*Simpl.* Questo fu dimostrato da Aristotile nelle sue meccaniche prima che da ogni altro.

*Salv* Voglio, che gli concediamo il primato nel tempo, ma nella fermezza della dimostrazione parmi, che se gli debba per grand'intervallo anteporre Archimede, da una sola proposizione del quale dimostrata da esso negli Equiponderanti, dipendono le ragioni non solamente della Leva, ma della maggior parte degli altri strumenti meccanici.

*Sagr.* Ma giacchè questo principio è il fondamento di quello, che voi avete intenzione di volerci dimostrare, non sarebbe se non molto a proposito l' arrecarci anco la prova di tal supposizione, quando non sia materia molto prolissa, dandoci una intera, e compita instruzione.

*Salv.* Come questo si abbia a fare, sarà pur meglio, che io per altro ingresso alquanto diverso da quello d' Archimede v' introduca nel campo di tutte le future specolazioni, e che non supponendo altro, se non che pesi uguali posti in bilancia di braccia eguali, facciano l'equilibrio, (principio supposto parimente dal medesimo Archimede) io venga poi a dimostrarvi, come non solamente altrettanto sia vero, che pesi diseguali facciano l'Equilibrio in stadera di braccia diseguali secondo la proporzione di essi pesi permutatamente sospesi, ma che l' istessa cosa fa colui, che colloca pesi eguali in distanze eguali, che quello che colloca pesi dis-

eguali in distanze, che abbiano permutatamente la medesima proporzione, che i pesi. Or per chiara dimostrazione di quanto dico, segno un prisma, o cilindro solido A B, sospeso dall' estremità alla linea H I, e sostenuto da due fili H A, I B. (fig. XIV) È manifesto, che se io sospenderò il tutto dal filo C posto nel mezzo della bilancia H I, il prisma A B resterà equilibrato, essendo la metà del suo peso da una banda, e l'altra dall'altra del punto della sospensione C pel principio da noi supposto. Intendasi ora il prisma esser diviso in parti diseguali dal piano per la linea D, e sia la parte D A maggiore, e la D B minore, ed acciocchè fatta tal divisione le parti del prisma restino nel medesimo sito, e costituzione rispetto alla linea H I soccorriamo con un filo E D, il quale fermato nel punto E sostenga le parti del prisma A D, D B; non è da dubitarsi, che non si essendo fatta veruna local mutazione nel prisma rispetto alla bilancia H I, ella resterà nel medesimo stato dell' equilibrio. Ma nella medesima costituzione resterà ancora, se la parte del prisma, che ora è sospesa dalle due estremità colli fili A H, D E, si appenda ad un sol filo G L posto nel mezzo, e parimente l' altra parte D B non muterà stato sospesa dal mezzo, e sostenuta dal filo F M. Sciolti dunque i fili H A, E D, I B, e lasciati solo li due G L, F M, resterà l'istesso equilibrio, fatta pur sempre la sospensione dal punto C. Or qui voltiamo-

ci a considerare, come noi abbiamo due gravi A D, D B, pendenti dai termini G, F di una libra G F, nella quale si fa l'equilibrio dal punto C, in modo che la distanza della sospensione del grave A D dal punto C è la linea C G, e l'altra parte C F è la distanza, dalla qual pende l'altro grave D B. Resta dunque solo da dimostrarsi, tali distanze aver la medesima proporzione tra di loro, che hanno gli stessi pesi, ma permutatamente presi, cioè che la distanza G C alla C F sia come il prisma D B al prisma D A, il che proveremo così. Essendo la linea G E la metà della E H, e la E F metà della E I, sarà tutta la G F metà di tutta la H I, e però eguale alla C I, e trattane la parte comune C F, sarà la rimanente G C eguale alla rimanente F I, cioè alla F E, e presa comunemente la C E saranno le due G E, C F eguali, e però come G E ad E F, così F C a C G, ma come G E ad E F, così la doppia alla doppia, cioè H E ad E I, cioè il prisma A D al prisma D B. Adunque per l'egual proporzione, e convertendo, come la distanza G C alla distanza C F, così il peso B D al peso D A, che è quello, che io voleva provarvi. Inteso sin qui non credo, che voi porrete difficoltà in ammettere, che i due prismi A D, D B facciano l'equilibrio dal punto C, perchè la metà di tutto il solido A B è alla destra della sospensione C, e l'altra metà dalla sinistra, e che così si vengono a rappresentar due pesi eguali

disposti, e distesi in due distanze eguali. Che poi li due prismi A D, D B ridotti in due dadi, o in due palle, o in due qual'altre si siano figure; (purchè si conservino le sospensioni medesime G, F) seguitino di far l'equilibrio dal punto C, non credo, che sia alcuno, che ne possa dubitare, perchè troppo manifesta cosa è, che le figure non mutano peso, dove si ritenga la medesima quantità di materia. Dal che possiamo raccor la general conclusione, che due pesi qualunque si siano fanno l' equilibrio da distanze permutatamente rispondenti alle loro gravità. Stabilito dunque tal principio avanti che passiamo più oltre, debbono mettere in considerazione, come queste forze, resistenze, momenti, figure, si posson considerare in astratto, e separate dalla materia, ed anco in concreto, e congiunte colla materia; ed in questo modo quelli accidenti, che converranno alle figure considerate come immateriali, riceveranno alcune modificazioni, mentre gli aggiugneremo la materia, ed in conseguenza la gravità. Come per esempio, se noi intenderemo una leva, qual sarebbe questa B A (Fig. xv. ), la quale posando su 'l sostegno C sia applicata per sollevare il grave sasso D, è manifesto pel dimostrato principio, che la forza posta nell' estremità B, basterà per adequare la resistenza del grave D, se il suo momento al momento di èsso D abbia la medesima proporzione che ha

la distanza A C alla distanza C B, e questo è vero non mettendo in considerazione altri momenti, che quelli della semplice forza in B, e della resistenza in D, quasi che l'istessa Leva fusse immateriale, e senza gravità. Ma se noi metteremo in conto la gravità ancora dello strumento stesso della leva, la quale sarà talor di legno, e talvolta anco di ferro, è manifesto, che alla forza in B aggiunto il peso della leva altererà la proporzione, la quale converrà pronunziare sotto altri termini. E però prima che passar più oltre è necessario, che noi convenghiamo in por distinzione tra queste due maniere di considerare; chiamando un prendere assolutamente quello, quando intenderemo lo strumento preso in astratto, cioè separato dalla gravità della propria materia: ma congiugnendo colle figure semplici ed assolute la materia colla gravità ancora, nomineremo le figure congiunte colla materia momento, o forza composta.

*Sagr.* È forza ch' io rompa il proposito, che aveva di non dar occasione di digredire, ma non potrei con attenzione applicarmi al rimanente, se non mi fusse rimosso certo scrupolo, che mi nasce; ed è questo, che mi pare, che V. S. faccia comparazione della forza posta in B colla total gravità del sasso D, della qual gravità mi pare, che una parte, e forse forse la maggiore si appoggi sopra il piano dell'orizzonte; sicchè....

*Salv.* Ho inteso benissimo. V. S. non soggiunga altro; ma solamente avverta, che io non ho nominata la gravità totale del sasso, ma ho parlato del momento, che egli tiene, ed esercita sopra il punto A estremo termine della Leva B A, il quale è sempre minore dell' intero peso del sasso; ed è variabile secondo la figura della pietra, e secondo che ella vien più, o meno sollevata.

*Sagr.* Resto appagato, ma mi nasce un altro desiderio, che è, che per intera cognizione mi fusse dimostrato il modo, se vi è, di potere investigare qual parte sia del peso totale quella, che vien sostenuta dal soggetto piano, e quale quella, che grava sul vette nell' estremità A.

*Salv.* Perchè posso con poche parole dargli soddisfazione, non voglio lasciar di servirla; però facendone un poco di figura, intenda V. S. il peso, il cui centro di gravità sia A (fig. XVI.) appoggiato sopra l'Orizzonte col termine B, e nell' altro sia sostenuto col Vette C G, sopra il sostegno N da una potenza posta in G, e dal centro A, e dal termine C caschino perpendicolari all' Orizzonte A O, C F. Dico il momento di tutto il peso al momento della potenza in G aver la proporzion composta della distanza G N alla distanza N C, e della F B alla B O. Facciasi come la linea F B alla B O, così la N C alla X, ed essendo tutto il peso A sostenuto dalle due

potenze poste in B e C, la potenza B alla C è come la distanza F O alla O B, e componendo le due potenze B, C insieme, cioè, il total momento di tutto il peso A alla potenza in C è come la linea F B alla B O, cioè come la N C alla X; ma il momento della potenza in C al momento della potenza in G è, come la distanza G N alla N G; adunque per la perturbata il total peso A al momento della potenza in G, è come la G N alla X; ma la proporzione di G N alla X è composta della proporzione G N ad N C, e di quella di N C ad X, cioè di F B a B O, adunque il peso A alla potenza che lo sostiene in G, ha la proporzione composta delle G N ad N C, e di quella di F B a B O, ch'è quello, che si doveva dimostrare. Or ritornando al nostro primo proposito, intese tutte le cose sin qui dichiarate, non sarà difficile l'intender la ragione, onde avvenga, che un prisma, o cilindro solido di vetro, acciajo, legno, o altra materia frangibile, che sospeso per lo lungo sosterrà gravissimo peso, che gli sia attaccato, ma in traverso (come poco fa dicevamo) da minor peso assai potrà tal volta essere spezzato, secondo che la sua lunghezza eccederà la sua grossezza. Imperocchè figuriamoci il prisma solido A B C D (fig. XVII.) fitto in un muro dalla parte A B, e nell' altra estremità s'intenda la forza del peso E, (intendendo sempre il muro esser

eretto all'Orizzonte, ed il prisma, o cilindro fitto nel muro ad angoli retti) è manifesto, che dovendosi spezzare si romperà nel luogo B, dove il taglio del muro serve per sostegno, e la B C per la parte della leva, dove si pone la forza; e la grossezza del solido B A è l'altra parte della leva, nella quale è posta la resistenza, che consiste nello staccamento, che s'ha da fare della parte del solido B D, che è fuor del muro, da quella che è dentro: e per le cose dichiarate il momento della forza posta in C al momento della resistenza, che sta nella grossezza del prisma, cioè nell'attaccamento della base B A colla sua contigua, ha la medesima proporzione, che la lunghezza C B alla metà della B A, e però l'assoluta resistenza all'esser rotto, che è nel prisma B D (la quale assoluta resistenza è quella, che si fa col tirarlo per diritto, perchè allora tanto è il moto del movente, quanto quello del mosso) alla resistenza respettiva, che ha all'esser rotto con l'ajuto della leva B C, ha la medesima proporzione, che la lunghezza B C alla metà di A B nel prisma, che nel cilindro è il semidiametro della sua base. E questa sia la nostra prima proposizione. E notate che questo, che dico, si debbe intendere rimossa la considerazione del peso proprio del solido B D, il qual solido ho preso, come nulla pesante. Ma quando vorremo mettere in

conto la sua gravità congiugnendola col peso E, dobbiamo al peso I E aggiugnere la metà del peso del solido B C, sicchè essendo v. g. il peso di B D due libbre, e'l peso di E libbre dieci, si dee pigliare il peso E come se fusse undici.

*Simpl.* E perchè non come se fusse dodici?

*Salv.* Il peso E, Sig. Simp. mio, pendente dal termine C, preme in rispetto alla leva B C, con tutto il suo momento di libbre dieci, dove se fusse appeso il solo B D, graviterebbe con tutto il momento di due libbre, ma come vedete, tal solido è distribuito per tutta la lunghezza B C uniformemente, onde le parti sue vicine all'estremità B gravitano manco delle più remote; sicchè in somma ristorando quelle con queste, il peso di tutto il prisma si riduce a lavorare sotto il centro della sua gravità, che risponde al mezzo della leva B C; ma un peso pendente dalla estremità C ha momento doppio di quello, che avrebbe pendendo dal mezzo; e però la metà del peso del prisma si dee aggiugnere al peso E, mentre ci serviamo del momento d'amendue, come locati nel termine C.

*Simpl* Resto capacissimo, e di più s'io non m'inganno, parmi che la potenza di amendue i pesi B D, ed E posti così, avrebbe l'istesso momento, che se tutto il peso di B D col doppio di E, fusse appeso nel mezzo della leva B C.

*Salv.* Così è precisamente, e si dee tenere a memoria. Qui possiamo immediatamente intender, come, e con che proporzione resista più una verga, o vogliam dir prisma più largo, che grosso all' esser rotto, fattogli forza secondo la sua larghezza, che secondo la grossezza. Per intelligenza di che intendasi una riga A D, (fig. XVIII.) la cui larghezza sia A C, e la grossezza assai minore C B; si cerca, perchè volendola romper per taglio, come nella prima figura resisterà al gran peso T, ma posta per piatto, come nella seconda figura, non resisterà all' X minore del T; il che si fa manifesto, mentre intendiamo il sostegno essere una volta sotto la linea B C, ed un' altra sotto la C A, e le distanze delle forze esser nell' un caso, e nell'altro eguali, cioè la lunghezza B D. Ma nel primo caso la distanza della resistenza dal sostegno, che è la metà della linea C A, è maggiore della distanza nell'altro caso, la quale è la metà della B C: però la forza del peso T, conviene, che sia maggiore della X, quanto la metà della larghezza C A è maggiore della metà della grossezza B C, servendoci quella per contralleva della C A, e questa della C B per superare la medesima resistenza, che è la quantità delle fibre di tutta la base A B. Concludesi per tanto la medesima riga, o prisma più largo, che grosso resister più all'esser rotto per taglio, che per piatto, se-

condo la proporzione della larghezza alla grossezza.

Conviene ora, che cominciamo a investigare, secondo qual proporzione vada crescendo il momento della propria gravità in relazione alla propria resistenza all' essere spezzato in un prisma, o cilindro, mentre stando parallelo all' Orizzonte si va allungando; il qual momento trovo andar crescendo in duplicata proporzione di quella dell'allungamento. Per la cui dimostrazione intendasi il prisma, o cilindro A D (fig. XIX) fitto saldamente nel muro dall' estremità A, e sia equidistante all'Orizzonte; ed il medesimo intendasi allungato sino in E aggiugnendovi la parte B E. È manifesto, che l' allungamento della leva A B sino in C cresce per se solo, cioè assolutamente preso, il momento della forza premente contro alla resistenza dello staccamento, e rottura da farsi in A secondo la proporzione di C A a B A, ma oltre a questo il peso aggiunto del solido B E al peso del solido A B, cresce il momento della gravità premente secondo la proporzione del prisma A E al prisma A B, la qual proporzione è la medesima della lunghezza A C alla A B, adunque è manifesto, che congiunti i due accrescimenti delle lunghezze, e delle gravità, il momento composto di amendue è in doppia proporzione di qualunque di esse. Concludasi

che tengono unite le parti dei solidi. Ma se consideriamo, che nel far forza per traverso ci serviamo di due leve, delle quali le parti, o distanze, dove si applicano le forze, sono le linee D G, F H, i sostegni sono ne' punti D, F, ma le altre parti, o distanze, dove son poste le resistenze, sono i semidiametri dei cerchi D C, E F, perchè i filamenti sparsi per tutte le superficie dei cerchi, è come se tutti si riducessero nei centri: considerando, dico, tali leve, intenderemo la resistenza nel centro della base E F contro alla forza di H, esser tanto maggiore della resistenza della base C D contro alla forza posta in G, (e sono le forze in G, ed H, di leve eguali D G, F H,) quanto il semidiametro F E è maggiore del semidiametro D C; cresce dunque la resistenza all'esser rotta nel cilindro B sopra la resistenza del cilindro A, secondo amendue le proporzioni dei cerchi E F, D C, e dei loro semidiametri, o vogliam dir diametri: ma la proporzione dei cerchi è doppia di quella dei diametri: adunque la proporzione delle resistenze, che di quelle si compone, è triplicata della proporzione dei medesimi diametri, che è quello, che doveva provare. Ma perchè anco i cubi sono in tripla proporzione dei loro lati, possiamo similmente concludere, le resistenze dei cilindri egualmente lunghi esser tra di loro come i cubi dei loro diametri.

Da questo che si è dimostrato, possiamo concludere ancora, le resistenze dei prismi, e cilindri egualmente lunghi aver sesquialtera proporzione di quella degli stessi cilindri. Il che è manifesto, perchè i prismi e cilindri egualmente alti hanno fra di loro la medesima proporzione, che le lor basi, cioè, doppia dei lati, o diametri di esse basi; ma le resistenze (come si è dimostrato) hanno triplicata proporzione dei medesimi lati, o diametri: adunque la proporzione delle resistenze è sesquialtera della proporzione degli stessi solidi; ed in conseguenza dei pesi dei medesimi solidi.

*Simp.* Egli è forza, che avanti che si proceda più oltre, io resti sincerato di certa mia difficultà, e questa è, che sin qui non ho sentito mettere in considerazione certa altra sorta di resistenza, la quale mi par che venga diminuita nei solidi, secondo che si vanno più e più allungando, e non solo nell' uso trasversale, ma ancora per lo lungo, in quel modo appunto che vediamo una corda lunghissima esser molto meno atta a reggere un gran peso, che se fusse corta: onde io credo, che una verga di legno o di ferro più peso assai potrà reggere, se sarà corta, che se sarà molto lunga; intendendo sempre usata per lo lungo, e non in traverso; ed anco messo in conto il suo proprio peso, che nella più lunga è maggiore.

*Salv.* Dubito, Sig. Simpl. che in que-

sto punto voi con molti altri v'inganniate, se però ho ben compreso il vostro concetto, sicchè voi vogliate dire, che una corda lunga, v. g. quaranta braccia non possa sostenere tanto peso, quanto se fosse un braccio o due della medesima corda.

*Simpl.* Cotesto ho voluto dire, e sin qui mi par proposizione assai probabile.

*Salv.* Ma io l'ho per falsa, non che per impossibile; e credo di potervi assai agevolmente cavar di errore. Però ponghiamo questa corda A B (Fig. XXI.) fermata di sopra dal capo A, e dall' altro sia il peso C, dalla cui forza debba essa corda essere rotta. Assegnatemi voi, Sig. Simplicio, il luogo particolare dove debba seguir la rottura.

*Simp.* Sia nel luogo D.

*Salv.* Vi domando qual sia la cagione dello strapparsi in D.

*Simpl.* È la causa di ciò, perchè la corda in quella parte non era potente a reggere, v. g. cento libbre di peso, quanto è la parte D B colla pietra C.

*Salv.* Adunque tuttavolta che tal corda nella parte D venisse violentata dalle medesime cento libbre di peso, ella lì si strapperebbe.

*Simpl.* Così credo.

*Salv.* Ma ditemi ora, chi attaccasse il medesimo peso non al fine della corda B, ma vicino al punto D, come sarebbe in E, ovvero legasse la corda non nella

altezza A, ma più vicino, e sopra al punto medesimo D come sarebbe in F, ditemi, dico, se il punto D sentirebbe il medesimo peso delle cento libbre.

*Simpl.* Sentirebbelo, accompagnando però il pezzo di corda E B colla pietra C.

*Salv.* Se dunque la corda nel punto D vien tirata dalle medesime cento libbre di peso, si romperà per la vostra concessione; e pure la F E è un piccol pezzo della lunga A B, come dunque volete più dire, che la corda lunga sia più debole della corta? Contentatevi dunque di esser cavato di un errore, nel quale avete avuto molti compagni, ed anco per altro molto intelligenti. E seguitiamo innanzi: ed avendo dimostrato i prismi e cilindri crescere il lor momento sopra le proprie resistenze secondo i quadrati delle lunghezze loro (mantenendo però sempre la medesima grossezza) e parimente gli egualmente lunghi, ma differenti in grossezza crescer le lor resistenze secondo la proporzione dei cubi dei lati, o diametri delle lor basi, passiamo a investigare quello che accaggia a tali solidi differenti in lunghezza e grossezza, nei quali io osservo, che

I prismi e cilindi di diversa lunghezza e grossezza hanno le lor resistenze all'esser rotti di proporzione composta della proporzione dei cubi de' diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatamente prese.

Siano tali due cilindri questi (Fig. XXII.) A B C, D E F. Dico, la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D F, aver la proporzione composta della proporzione del cubo del diametro A B al cubo del diametro D E, e della proporzione della lunghezza E F alla lunghezza B C. Pongasi la E G eguale alla B C, e delle linee A B, D E sia terza proporzionale la H, e quarta la I, e come la E F alla B C, così sia la I alla S. E perchè la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D G è, come il cubo A B al cubo D E, cioè come la linea A B alla linea I, e la resistenza del cilindro G D alla resistenza del cilindro D F, come la lunghezza F E alla E G, cioè come la linea I alla S, adunque per l'egual proporzione, come la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D F, così la linea A B alla S, ma la linea A B alla S ha la proporzion composta della A B alla I, e della I alla S, adunque la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D F ha la proporzion composta della A B alla I, cioè del cubo di A B al cubo di D E, e della proporzione della linea I alla S, cioè della lunghezza E F alla lunghezza B C, che è quello, che io intendeva di dimostrare.

Dopo la dimostrata Proposizione voglio, che consideriamo quello che accaggia

tra i cilindri e prismi simili, dei quali dimostreremo, come

Dei cilindri e prismi simili i momenti composti, cioè risultanti dalle lor gravità, e dalle loro lunghezze, che sono come Leve, hanno tra di loro proporzione sesquialtera di quella che hanno le resistenze delle medesime lor basi.

Per lo che dimostrare segniamo i due cilindri simili A B, C D (Fig. xxiii.). Dico, il momento del cilindro A B per superare la resistenza della sua base B, al momento di C D per superare la resistenza della sua D, aver sesquialtera proporzione di quella, che ha la medesima resistenza della base B alla resistenza della base D; e perchè i momenti dei solidi A B, C D per superar le resistenze delle lor basi B, D son composti delle lor gravità, e delle forze delle lor leve, e la forza della leva A B è eguale alla forza della leva C D, e questo perchè la lunghezza A B al semidiametro della base B ha la medesima proporzione (per la similitudine de' cilindri) per la lunghezza C D al semidiametro della base D, resta, che il momento totale del cilindro A B al momento totale di C D sia, come la sola gravità del cilindro A B alla sola gravità del cilindro C D, cioè come l'istesso cilindro A B all' istesso C D: ma questi sono in triplicata proporzione dei diametri delle basi loro B, D, e le resistenze delle medesime basi, essendo tra di loro come

l'istesse basi, sono in conseguenza in duplicata proporzione dei medesimi loro diametri; adunque i momenti dei cilindri son in sesquialtera proporzione delle resistenze delle basi loro.

*Simp.* Questa proposizione mi è veramente giunta non solamente nuova, ma inaspettata, e nel primo aspetto assai remota dal giudizio, che io ne averei conghietturalmente fatto: imperocchè essendo tali figure in tutto il restante simili, avrei tenuto per fermo, che anco i momenti loro verso le proprie resistenze avessero ritenuta la medesima proporzione.

*Sagr.* Questa è la dimostrazione di quella proposizione, che nel principio dei nostri ragionamenti dissi parermi di scorger per ombra.

*Salv.* Quello che ora accade al Sig. Simp. avvenne per alcun tempo a me, credendo, che le resistenze di solidi simili fusser simili, sin che certa, nè anche molto fissa o accurata osservazione mi pareva rappresentarmi, nei solidi simili non mantenersi un tenore eguale nelle loro robustezze, ma i maggiori esser meno atti a patire gli eventi violenti, come rimaner più offesi dalle cadute gli uomini grandi che i piccoli fanciulli, e come da principio dicevamo, cadendo dalla medesima altezza vedesi andare in pezzi una gran trave, o una colonna, ma non così un piccolo corrente, o un piccolo cilindro di

marmo. Questa tal quale osservazione mi destò la mente all' investigazione di quello che ora son per dimostrarvi: proprietà veramente ammirabile, poichè tra le infinite figure solide simili tra di loro pur due non ve ne sono, i momenti delle quali verso le proprie resistenze ritengano la medesima proporzione.

*Simp.* Ora mi fate sovvenire non so che posto da Aristotile tra le sue Questioni Meccaniche, mentre vuol render la ragione, onde avvenga che i legni quanto più son lunghi, tanto più son deboli, e più e più si piegano, benchè i più corti sieno più sottili, e i lunghi più grossi, e se io ben mi ricordo, ne riduce la ragione alla semplice leva.

*Salv.* È verissimo; e perchè la soluzione non par che tolga interamente la ragion del dubitare, Mons. di Guevara, il quale veramente con i suoi dottissimi Comentarj ha altamente nobilitata, e illustrata quell' Opera, si estende con altre più acute speculazioni per isciorre tutte le difficoltà, restando però esso ancora perplesso in questo punto, se crescendosi colla medesima proporzione le lunghezze e le grossezze di tali solide figure, si debba mantenere l'istesso tenore nelle loro robustezze e resistenze nell' esser rotti, ed anco nel piegarsi. Io dopo un lungo pensarvi ho in questa maniera ritrovato quello che se-

guentemente son per apportarvi. E prima dimostrerò, che

Dei prismi o cilindri simili gravi un solo e unico è quello, che si riduce (gravato dal proprio peso) all' ultimo stato tra lo spezzarsi, e il sostenersi intero: sicchè ogni maggiore, come impotente a resistere al proprio peso, si romperà, e ogni minore resiste a qualche forza che gli venga fatta per romperlo.

Sia il prisma grave A B (Fig. XXIV.) ridotto alla somma lunghezza di sua consistenza, sicchè allungato un minimo di più si rompesse. Dico questo essere unico tra tutti i suoi simili (che pur sono infiniti) atto ad esser ridotto in tale stato ancipite, sicchè ogni maggiore oppresso dal proprio peso si spezzerà, ed ogni minore no, anzi potrà resistere a qualche aggravio di nuova violenza, oltre a quella del proprio peso. Sia il prisma C E simile, e maggiore di A B. Dico questo non poter consistere, ma rompersi superato dalla propria gravità. Pongasi la parte C D lunga quanto A B. E perchè la resistenza di C D a quella di A B è, come il cubo della grossezza di C D al cubo della grossezza di A B, cioè come il prisma C E al prisma A B, (essendo simili) adunque il peso di C E è il sommo, che possa esser sostenuto nella lunghezza del prisma C D; ma la lunghezza C E è maggiore; adunque il prisma C E si romperà. Ma sia F C minore:

si dimostrerà similmente (posta F H eguale alla B A) la resistenza di F C a quella di A B esser, come il prisma F C al prisma A B, quando la distanza A B, cioè F H fusse eguale alla F C; ma è maggiore; adunque il momento del prisma F C posto in C non basta per rompere il prisma F C.

*Sagr.* Chiarissima e breve dimostrazione concludente la verità, e necessità di una Proposizione, che nel primo aspetto sembra assai remota dal verisimile. Bisognerebbe dunque alterare assai la proporzione tra la lunghezza e la grossezza del prisma maggiore coll' ingrossarlo, o scorciarlo, acciò si riducesse allo stato ancipite tra il reggersi e lo spezzarsi, e la investigazione di tale stato penso, che potesse essere altrettanto ingegnosa.

*Salv.* Anzi più presto d'avvantaggio, come anco più laboriosa, ed io lo so, che vi spesi non piccol tempo per ritrovarla, ed ora voglio participarvela.

Dato dunque un cilindro, o prisma di massima lunghezza da non esser dal suo proprio peso spezzato, e data una lunghezza maggiore, trovar la grossezza d'un altro cilindro o prisma, che sotto la data lunghezza sia l'unico e massimo resistente al proprio peso.

Sia il cilindro B C (Fig. xxv.) massimo resistente al proprio peso, e sia la D E lunghezza maggiore della A C, biso-

gna trovare la grossezza del cilindro, che sotto la lunghezza D E sia il massimo resistente al proprio peso. Sia delle lunghezze D E, A C terza proporzionale I, e come D E ad I, così sia il diametro F D al diametro B A, e facciasi il cilindro F E. Dico, questo essere il massimo ed unico tra tutti i suoi simili resistente al proprio peso. Delle linee D E, I sia terza proporzionale M, e quarta O. E pongasi F G eguale alla A C. E perchè il diametro F D al diametro A B è, come la linea D E alla I, e delle D E, I la O, è quarta proporzionale, il cubo di F D al cubo di B A sarà, come la D E alla O; ma come il cubo di F D al cubo di B A, così è la resistenza del cilindro D G alla resistenza del cilindro B C; adunque la resistenza del cilindro D G a quella del cilindro B C è, come la linea D E alla O. E perchè il momento del cilindro B C è eguale alla sua resistenza, se si mostrerà il momento del cilindro F E al momento del cilindro B C esser, come la resistenza D F alla resistenza B A, cioè come il cubo di F D al cubo di B A, cioè come la linea D E alla O, avremo l'intento, cioè il momento del cilindro F E esser eguale alla resistenza posta in F D. Il momento del cilindro F E al momento del cilindro D G è, come il quadrato della D E al quadrato della A C, cioè come la linea D E alla I; ma il momento del cilindro D G al momento del cilindro B C

è, come il quadrato D F al quadrato B A, cioè come il quadrato di D E al quadrato della I, cioè come il quadrato della I al quadrato della M, cioè come la I alla O; adunque per l'egual proporzione, come il momento del cilindro F E al momento del cilindro B C, così è la linea D E alla O, cioè il cubo D F al cubo B A, cioè la resistenza della base D F alla resistenza della base B A, che è quello che si cercava.

*Sagr.* Questa, Sig. Salviati, è una lunga dimostrazione, e molto difficile a ritenersi a memoria per sentirla una sola volta; onde io vorrei, che V. S. si contentasse di replicarla di nuovo.

*Salv.* Farò quanto V. S. comanda, ma forse sarebbe meglio arrecarne una più speditiva, e breve: ma converrà fare una figura alquanto diversa.

*Sagr.* Maggiore sarà il favore, e la già dichiarata mi farà grazia darmela scritta, acciò a mio bell' agio possa ristudiarla.

*Salv.* Non mancherò di servirla. Ora intendiamo un cilindro A, (Fig. XXVI.) il diametro della cui base sia la linea D C, e sia questo A il massimo, che possa sostenersi, del quale vogliamo trovare un maggiore, che pur sia il massimo esso ancora, ed unico, che si sostenga. Intendiamone un simile ad esso A, e lungo quanto la linea assegnata, e questo sia, v. gr. E, il diametro della cui base sia la K L, e

delle due linee D C, K L sia terza proporzionale la M N, che sia diametro della base del cilindro X, di lunghezza eguale all' E. Dico questo X esser quello che cerchiamo. E perchè la resistenza D C alla resistenza K L è, come il quadrato D C al quadrato K L, cioè come il quadrato K L al quadrato M N, cioè come il cilindro E al cilindro X, cioè come il momento E al momento X; ma la resistenza K L alla M N è, come il cubo di K L al cubo di M N, cioè come il cubo D C al cubo K L, cioè come il cilindro A al cilindro E, cioè come il momento A al momento E; adunque per l'analogia perturbata come la resistenza D C alla M N, così il momento A al momento X; adunque il prisma X è nella medesima costituzione di momento e resistenza, che il prisma A.

Ma voglio che facciamo il Problema più generale, e la proposizione sia questa.

Dato il cilindro A C, qualunque si sia il suo momento verso la sua resistenza, e data qualsisia lunghezza D E, trovar la grossezza del cilindro, la cui lunghezza sia D E, e il suo momento verso la sua resistenza ritenga la medesima proporzione che il momento del cilindro A C alla sua.

Ripresa l'istessa figura di sopra (fig.xxv.,) e quasi l'istesso progresso diremo. Perchè il momento del cilindro F E al momento della parte D G, ha la medesima proporzione, che il quadrato E D al quadrato F G, cioè che la linea D E al-

la I, ed il momento del cilindro D G al momento del cilindro A C è, come il quadrato F D al quadrato A B, cioè come il quadrato D E al quadrato I, cioè come il quadrato I al quadrato M, cioè come la linea I alla O; adunque ex aequali il momento del cilindro F E al momento del cilindro A C ha la medesima proporzione della linea D E alla O, cioè del cubo D E al cubo I, cioè del cubo di F D al cubo di A B, cioè della resistenza della base F D alla resistenza della base A B, ch' è quello che si doveva fare.

Or vedano come dalle cose sin qui dimostrate apertamente si raccoglie l' impossibilità del poter non solamente l' arte, ma la natura stessa crescer le sue macchine a vastità immensa, sicchè impossibil sarebbe fabbricar Navilii, Palazzi, o Templi vastissimi, li cui remi, antenne, travamenti, catene di ferro, ed in somma le altre lor parti consistessero: come anco non potrebbe la natura far alberi di smisurata grandezza, poichè i rami loro gravati dal proprio peso finalmente si fiaccherebbero; e parimente sarebbe impossibile far strutture di ossa per uomini, cavalli, o altri animali, che potessero sussistere, e far proporzionatamente gli uffizj loro, mentre tali animali si dovessero augumentare ad altezze immense, se già non si togliesse materia molto più dura, e resistente della consueta, o non si deformassero tali ossi

sproporzionatamente ingrossandogli, onde poi la figura, ed aspetto dell'animale ne riuscisse mostruosamente grosso: il che forse fu avvertito dal mio accortissimo poeta, mentre descrivendo un grandissimo Gigante disse:

Non si può compartir quanto sia lungo,
Sì smisuratamente è tutto grosso.

E per un breve esempio di questo, che dico, disegnai già la ( Fig. XXVII. ) di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato con tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l' uffizio proporzionato a quel dell' osso minore nell' animal più piccolo, e le figure son queste: dove vedete sproporzionata figura, che divien quella dell' osso ingrandito. Dal che è manifesto, che chi volesse mantenere in un vastissimo Gigante le proporzioni, che hanno le membra in un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura, e resistente per formarne l' ossa, ovvero ammettere, che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca, che negli uomini di statura mediocre, altrimenti crescendogli a smisurata altezza, si vedrebbono dal proprio peso opprimere, e cadere. Dove che all' incontro si vede nel diminuire i corpi non si diminuir colla medesima proporzione le forze, anzi nei minori crescer la gagliardia con proporzion maggiore. Onde io credo, che un

piccolo cane porterebbe addosso due, o tre cani eguali a se, ma non penso già, che un cavallo portasse nè anco un solo cavallo a se stesso eguale.

*Simp.* Ma se così è grand' occasione mi danno da dubitare le moli immense, che vediamo nei pesci, che tal Balena, per quanto intendo, sarà grande per dieci Elefanti, e pur si sostengono.

*Salv.* Il vostro dubbio, Sig. Simplicio, mi fa accorgere d'una condizione da me non avvertita prima, potente essa ancora a far che giganti, ed altri animali vastissimi potessero consistere, e agitarsi non meno che i minori, e ciò seguirebbe, quando non solo si aggiugnesse gagliardia all' ossa, ed all'altre parti, officio delle quali è il sostener il proprio, e 'l sopravvegnente peso; ma lasciata la struttura delle ossa colle medesime proporzioni pur nell' istesso modo: anzi più agevolmente consisterebbono le medesime fabbriche, quando con tal proporzione si diminuisse la gravità della materia delle medesime ossa, e quella della carne, o di altro, che sopra l' ossa si abbia ad appoggiare; e di questo secondo artifizio si è prevalsa la natura nella fabbrica dei pesci, facendogli le ossa, e le polpe non solamente assai leggere, ma senza veruna gravità.

*Simp.* Vedo ben, Signor Salviati, dove tende il vostro discorso: voi volete di-

re, che per essere l'abitazione dei pesci l'elemento dell' acqua, la quale per la sua corpulenza, o come altri vogliono, per la sua gravità scema il peso ai corpi, chè in quella si demergono, per tal ragione la materia dei pesci non pesando può senza aggravio dell' ossa loro esser sostenuta; ma questo non basta, perchè quando bene il resto della sustanza del pesce non graviti, gravita però senza dubbio la materia dell' ossa loro. E chi dirà che una costola di Balena grande quanto una trave, non pesi assaissimo, e nell'acqua non dia al fondo? queste dunque non doveriano poter sussistere in sì vasta mole.

*Salv.* Voi acutamente opponete, e per risposta al vostro dubbio ditemi, se avete osservato stare i pesci quando piace loro sott' acqua immobili, e non discendere verso il fondo, o sollevarsi alla superficie senza far qualche forza col nuoto?

*Simp.* Questa è chiarissima osservazione.

*Salv.* Questo dunque potersi i pesci fermare come immobili a mezz' acqua è concludentissimo argomento, il composto della lor mole corporea agguagliar la gravità in ispezie dell' acqua, sicchè se in esso si trovano alcune parti più gravi dell'acqua, necessariamente bisogna, che ve ne sieno altre altrettanto men gravi, acciò si possa pareggiar l' equilibrio. Se dunque le ossa son più gravi, è necessario, che le

polpe, o altre materie, che vi siano, sien più leggere, e queste si opporranno colla lor leggerezza al peso dell'ossa; talchè negli acquatici avverrà l'opposito di quel, che accade negli animali terrestri, cioè che in questi tocchi all'ossa a sostenere il peso proprio, e quel della carne, e in quelli la carne regga la gravezza propria, e quella dell' ossa. E però dee cessar la maraviglia, come nell' acqua possano essere animali vastissimi, ma non sopra la terra, cioè nell' aria.

*Simp.* Resto appagato, e di più noto, che questi, che noi addimandiamo animali terrestri, più ragionevolmente si dovrebbero dimandare aerei, perchè nell' aria veramente vivono, e dall' aria son circondati, e dell' aria respirano.

*Sagr.* Piacemi il discorso del Sig. Simp. col suo dubbio, e colla soluzione. E di più comprendo assai facilmente, che uno di questi smisurati pesci tirato in terra forse non si potrebbe per lungo tempo sostenere, ma che relassate le attaccature dell' ossa, la sua mole si ammaccherebbe.

*Salv.* Io per ora inclino a creder l' istesso; nè son lontano a credere, che il medesimo avverrebbe a quel vastissimo navilio, il quale galleggiando in mare non si dissolve pel peso, e carico di tante merci, ed armamenti, che in secco, e circondato dall' aria forse si aprirebbe. Ma se-

guitiamo la nostra materia, e dimostriamo come

Dato un prisma, o cilindro col suo peso, ed il peso massimo sostenuto da esso, trovare la massima lunghezza, oltre alla quale prolungato dal solo suo proprio peso si romperebbe.

Sia dato il prisma A C (Fig. XXVIII.) col suo proprio peso, e dato parimente il peso D massimo da poter esser sostenuto dall' estremità C, bisogna trovare la lunghezza massima, sino alla quale si possa allungare il detto prisma senza rompersi. Facciasi come il peso del prisma A C al composto dei pesi A C col doppio del peso di D, così la lunghezza C A alla A H, tra le quali sia media proporzionale la A G. Dico A G esser la lunghezza cercata; imperocchè il momento gravante del peso D in C è eguale al momento del peso doppio di D, che fusse posto nel mezzo di A C, dove è anco il centro del momento del prisma A C, il momento dunque della resistenza del prisma A C, che sta in A, equivale al gravante del doppio del peso D col peso A C, attaccati però nel mezzo di A C. E perchè viene ad essersi fatto come il momento di detti pesi così situati, cioè del doppio D con A C al momento di A C, così la H A alla A C, tra le quali è media la A G; adunque il momento del doppio D col momento A C al momento A C è, come il quadrato

G A al quadrato A C: ma il momento premente del prisma G A al momento di A C è come il quadrato G A al quadrato A C: adunque la lunghezza A G è la massima, che si cercava, cioè quella, sino alla quale allungandosi il prisma A C si sosterrebbe, ma più oltre si spezzerebbe.

Sin qui si son considerati i momenti, e le resistenze dei prismi, e cilindri solidi, l'una estremità dei quali sia posta immobile, e solo nell'altra sia applicata la forza di un peso premente, considerandolo esso solo, ovver congiunto colla gravità del medesimo solido, o veramente la sola gravità dell'istesso solido. Ora voglio, che discorriamo alquanto dei medesimi prismi, e cilindri, quando fussero sostenuti da amendue l'estremità, ovvero che sopra un sol punto preso tra le estremità fusser posati. E prima dico, che il cilindro, che gravato dal proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza, oltre alla quale più non si sosterrebbe, o sia retto nel mezzo da un solo sostegno, ovvero da due nell' estremità, potrà esser lungo il doppio di quello, che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine. Il che per se stesso è assai manifesto, perchè se intenderemo del cilindro, che io segno A B C, (Fig. XXIX.) la sua metà A B esser la somma lunghezza potente a sostenersi stando fissa nel termine B, nell' istesso modo si sosterrà, se posata sopra il sostegno G sa-

rà contrappesata dall'altra sua metà B C. E similmente se del cilindro D E F la lunghezza sarà tale, che solamente la sua metà potesse sostenersi fissa nel termine D, ed in conseguenza l'altra E F, fissa nel termine F, è manifesto, che posti i sostegni H, I sotto l' estremità D, F, ogni momento che si aggiunga di forza, o di peso in E, quivi si farà la rottura.

Quello che ricerca più sottile specolazione è, quando astraendo dalla gravità propria di tali solidi, ci fusse proposto di dovere investigare, se quella forza, o peso che applicato al mezzo d' un cilindro sostenuto nelle estremità basterebbe a romperlo, potrebbe far l'istesso effetto applicato in qualsivoglia altro luogo più vicino all' una, che all'altra estremità. Come per esempio, se volendo noi rompere una mazza presala colle mani nell' estremità, ed appuntato il ginocchio in mezzo, l' istessa forza, che basterebbe usare per romperla in tal modo, basterebbe ancora, quando il ginocchio si puntasse non nel mezzo, ma più vicino all' un degli estremi.

*Sagr.* Parmi che il Problema sia toccato da Aristotile nelle sue questioni meccaniche.

*Salv.* Il quesito d' Aristotile non è precisamente l' istesso, perchè ei non cerca altro, se non di render la ragione, perchè manco fatica si ricerchi a romperlo, tenendo le mani nell' estremità del legno,

cioè remote assai dal ginocchio, che se le tenessimo vicine, e ne rende una ragione generale, riducendo la causa alle Leve più lunghe, quando s' allargano le braccia afferrando l' estremità. Il nostro quesito aggiugne qualche cosa di più ricercando se posto il ginocchio nel mezzo, o in altro luogo, tenendo pur le mani sempre nell' estremità, la medesima forza serva in tutti i siti.

*Sagr.* Nella prima apprensione parrebbe di sì, attesochè le due Leve mantengono in certo modo il medesimo momento, mentre quanto si scorcia l'una, tanto s'allunga l' altra.

*Salv.* Or vedete, quanto sono in pronto l' equivocazioni, e con quanta cautela, e circospezione convien andar per non v'incorrere. Cotesto che voi dite, e che veramente nel primo aspetto ha tanto del verisimile, in ristretto poi è tanto falso, che quando il ginocchio, che è il fulcimento delle due Leve, sia posto, o non posto nel mezzo, fa tal diversità, che di quella forza, che basterebbe per far la frazione nel mezzo, dovendola fare in qualche altro luogo, tal volta non basterà l'applicarvene quattro volte tanto, nè dieci, nè cento, nè mille. Faremo sopra ciò una tal quale considerazion generale, e poi verremo alla specifica determinazione della proposizione, secondo la quale si van-

no variando le forze per far la frazione più in un punto, che in un altro.

Segniamo prima questo legno A B ( Fig xxx. ) da rompersi nel mezzo sopra il sostegno C, ed appresso segniamo l'istesso, ma sotto i caratteri D E da rompersi sopra il sostegno F remoto dal mezzo. Prima è manifesto, che sendo le distanze A C, C B eguali, la forza sarà compartita egualmente nelle estremità B, A. Secondo poichè la distanza D F diminuisce dalla distanza A C, il momento della forza posta in D scema dal momento in A, cioè posto nella distanza C A, e scema secondo la proporzione della linea D F alla A C, ed in conseguenza bisogna crescerlo per pareggiare, o superar la resistenza di F; ma la distanza D F si può diminuire in infinito in relazione alla distanza A C; adunque bisogna poter crescere in infinito la forza da applicarsi in D per pareggiar la resistenza in F. Ma allo incontro secondo che cresce la distanza F E sopra la C B, convien diminuire la forza in E per pareggiare la resistenza in F; ma la distanza F E in relazione alla C B non si può crescere in infinito col ritirare il sostegno F verso il termine D, anzi nè anco il doppio; adunque la forza in E per pareggiare la resistenza in F sarà sempre più che la metà della forza in B. Comprendesi dunque la necessità del doversi augumentare i momenti del con-

giunto delle forze in E, D infinitamente, per pareggiare, o superare la resistenza posta in F, secondo che il sostegno F si andrà approssimando verso l'estremità D.

*Sagr.* Che diremo, S. Simplicio? non convien egli confessare, la virtù della Geometria essere il più potente strumento d'ogni altro per acutir l'ingegno, e disporlo al perfettamente discorrere, e specolare? e che con gran ragione voleva Platone i suoi scolari prima ben fondati nelle Matematiche? Io benissimo aveva compreso la facultà della Leva, e come crescendo, o scemando la sua lunghezza cresceva, o calava il momento della forza, e della resistenza: contuttociò nella determinazione del presente Problema m'ingannava, e non di poco, ma d'infinito.

*Simp.* Veramente comincio a comprendere, che la Logica, benchè strumento prestantissimo per regolare il nostro discorso, non arriva, quanto al destar la mente, all'invenzione, e all'acutezza della Geometria.

*Sagr.* A me pare, che la Logica insegni a conoscere, se i discorsi, e le dimostrazioni già fatte, e trovate procedono concludentemente, ma che ella insegni a trovare i discorsi, e le dimostrazioni concludenti, ciò veramente non credo io. Ma sarà meglio, che il Sig. Salv. ci mostri, secondo qual proporzione vadan crescen-

do i momenti delle forze per superar la resistenza del medesimo legno, secondo i luoghi diversi della rottura.

*Salv.* La proporzione, che ricercate, procede in cotal forma, che

Se nella lunghezza d'un cilindro si noteranno due luoghi, sopra i quali si voglia far la frazione di esso cilindro, le resistenze di detti due luoghi hanno fra di loro la medesima proporzione, che i rettangoli fatti dalle distanze di essi luoghi contrariamente presi.

Sieno le forze A, B ( Fig. xxxi. ) minime per rompere in C, e le E, F parimente le minime per rompere in D. Dico le forze A, B alle forze E, F aver la proporzion medesima, che ha il rettangolo A D B al rettangolo A C B. Imperocchè le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta delle forze A, B alla forza B, della B alla F, e della F alle F, E. Ma come le forze A, B alla forza B, così sta la lunghezza B A ad A C, e come la forza B alla F, così sta la linea D B alla B C, e come la forza F alle F, E, così sta la linea D A alla A B, adunque le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta delle tre, cioè della retta B A ad A C, della D B a B C, e della D A ad A B; ma delle due D A ad A B, ed A B ad A C, si compone la proporzione della D A ad A C; adunque le forze A, B alle forze E, F hanno

la proporzion composta di questa D A ad A C, e dell' altra D B a B C; ma il rettangolo A D B al rettangolo A C B ha la proporzion composta delle medesime D A ad A C, e D B a B C; adunque le forze A, B alle E, F stanno, come il rettangolo A D B al rettangolo A C B, che è quanto a dire la resistenza in C ad essere spezzato alla resistenza ad esser rotto in D aver la medesima proporzione, che il rettangolo A D B al rettangolo A C B, che è quello, che si doveva provare.

In conseguenza di questo Teorema possiamo risolvere un problema assai curioso; ed è,

Dato il peso massimo, retto dal mezzo di un cilindro, o prisma, dove la resistenza è minima, e dato un peso maggior di quello, trovare nel detto cilindro il punto, nel quale il dato peso maggiore sia retto, come peso massimo.

Abbia il dato peso, maggiore del peso massimo, retto dal mezzo del cilindro A B ( Fig. XXXII. ) ad esso massimo la proporzione della linea E alla F, bisogna trovare il punto nel cilindro, dal quale il dato peso venga sostenuto come massimo. Tra le due E, F sia media proporzionale la G, e come la E alla G, così si faccia la A D alla S, sarà la S minore della A D. Sia A D diametro del mezzo cerchio A H D, nel quale pongasi la A H eguale

alla S, e congiungasi H D, e ad essa si tagli eguale la D R. Dico il punto R essere il cercato, dal quale il dato peso maggiore del massimo retto dal mezzo del cilindro D verrebbe come massimo retto. Sopra la lunghezza B A facciasi il mezzo cerchio A N B, e si alzi la perpendicolare R N, e congiungasi N D. E perchè i due quadrati N R, R D sono eguali al quadrato N D, cioè al quadrato A D, cioè alli due A H, H D, e l' H D è eguale al quadrato D R, adunque il quadrato N R, cioè il rettangolo A R B sarà eguale al quadrato A H, cioè al quadrato S; ma il quadrato S al quadrato A D è, come la F alla E, cioè come il peso massimo retto in D al dato peso maggiore; adunque questo maggiore sarà retto in R come il massimo, che vi possa esser sostenuto; che è quello che si cercava.

*Sagr.* Intendo benissimo, e vo considerando, che essendo il prisma A B sempre più gagliardo, e resistente alla pressione nelle parti, che più e più si allontanano dal mezzo, nelle travi grandissime, e gravi se ne potrebbe levar non piccola parte verso l' estremità con notabile alleggerimento di peso, che nei travamenti di grandi stanze sarebbe di comodo, ed utile non piccolo. E bella cosa sarebbe il ritrovar quale figura dovrebbe aver quel tal solido, che in tutte le sue parti fusse egualmente resistente, tal che

non più facile fusse ad esser rotto da un peso, che lo premesse nel mezzo, che in qualsivoglia altro luogo.

*Salv.* Già era in procinto di dirvi cosa assai notabile, e vaga in questo proposito. Fo un poco di figura per meglio dichiararmi. Questo D B ( Fig. XXXIII. ) è un prisma, la cui resistenza ad essere spezzato nell' estremità A D da una forza premente nel termine B è tanto minore della resistenza, che si troverebbe nel luogo C I, quanto la lunghezza C B è minore della B A, come già si è dimostrato; intendasi adesso il medesimo prisma segato diagonalmente secondo la linea F B, sicchè le faccie opposte sieno due triangoli, uno dei quali verso noi è questo F A B. Ottiene tal solido contraria natura del prisma, cioè che meno resiste all' essere spezzato sopra il termine C, che sopra l'A dalla forza posta in B, quanto la lunghezza C B è minore della B A, il che facilmente proveremo, perchè intendendo il taglio C N O parallelo all' altro A F D, la linea F A alla C N nel triangolo F A B avrà la medesima proporzione, che la linea A B alla B C, e però se noi intenderemo nei punti A, C essere i sostegni di due Leve, le cui distanze B A, A F, B C, C N, queste saranno simili, e però quel momento, che ha la forza posta in B colla distanza B A sopra la resistenza posta nella distanza A F, l'avrà la medesima

forza in B colla distanza B C sopra la medesima resistenza, che fusse posta nella distanza C N: ma la resistenza da superarsi nel sostegno C, posta nella distanza C N dalla forza in B, è minore della resistenza in A, tanto quanto il rettangolo C O è minore del rettangolo A D, cioè quanto la linea C N è minore della A F, cioè la C B della B A; adunque la resistenza della parte O C B ad esser rotto in C è tanto minore della resistenza dell' intero D A O ad esser rotto in A, quanto la lunghezza C B è minore della A B. Aviamo dunque nel trave, o prisma D B, levatone una parte, cioè la metà, segandolo diagonalmente, e lasciato il cuneo, o prisma triangolare F B A, e sono due solidi di condizioni contrarie, cioè quello tanto più resiste, quanto più si scorcia, e questo nello scorciarsi perde altrettanto di robustezza. Ora stante questo, par ben ragionevole, anzi pur necessario, che se gli possa dare un taglio, per lo quale, togliendo via il superfluo, rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.

*Simp.* È ben necessario, che dove si passa dal maggiore al minore, s' incontri ancora l' eguale.

*Sagr.* Ma il punto sta ora a trovar, come si ha da guidar la sega per far questo taglio.

*Simp.* Questo mi si rappresenta; che dovrebbe esser opera assai facile, perchè se col segar il prisma diagonalmente levandone la metà, la figura, che resta, ritien contraria natura a quella del prisma intero, sicchè in tutti i luoghi, nei quali questo acquistava robustezza, quella altrettanto la perdeva, parmi che tenendo la via del mezzo, cioè levando solamente la metà di quella metà, che è la quarta parte del tutto, la rimanente figura non guadagnerà, nè perderà robustezza in tutti quei medesimi luoghi, nei quali la perdita, e il guadagno dell'altre due figure erano sempre eguali.

*Salv.* Voi Sig. Simp. non avete dato nel segno: e siccome io vi mostrerò, vedrete veramente, che quello, che si può segar del prisma, e levar via senza indebolirlo, non è la sua quarta parte, ma la terza. Ora resta (che è quello, che accennava il Sig. Sagr.) il ritrovar secondo che linea si dee far camminar la sega; la quale proverò, che dee esser linea parabolica. Ma prima è necessario dimostrare certo Lemma, che è tale:

Se saranno due Libre o Leve divise dai loro sostegni in modo, che le due distanze dove si hanno a costituire le potenze, abbiano tra di loro doppia proporzione delle distanze, dove saranno le resistenze, le quali resistenze siano tra loro, come le lor distanze, le potenze sostenenti saranno eguali.

Siano due Leve A B, C D (Fig. xxxiv.) divise sopra i lor sostegni E, F, talmente che la distanza E B alla F D abbia doppia proporzione di quella, che ha la distanza E A alla F C. Dico le potenze, che in B, D sosterranno le resistenze di A, C, esser tra loro eguali. Pongasi la E G media proporzionale tra E B, e F D: sarà dunque come B E ad E G, così G E ad F D, ed A E a C F, e così si è posto esser la resistenza di A alla resistenza di C. E perchè come E G ad F D, così A E a C F, sarà permutando come G E ad E A, così D F ad F C, e però (per esser le due Leve D C, G A divise proporzionalmente nei punti F, E) quando la potenza, che posta in D pareggia la resistenza C, fusse in G, pareggerebbe la medesima resistenza di C posta in A; ma per lo dato la resistenza di A alla resistenza di C ha la medesima proporzione, che la A E alla C F, cioè che la B E alla E G, adunque la potenza G, o vogliam dire D posta in B, sosterrà la resistenza posta in A. Che è quello, che si doveva provare.

Inteso questo: nella faccia F B (Fig. xxxv.) del prisma D B sia segnata la linea Parabolica F N B, il cui vertice B, secondo la quale sia segnato esso prisma, restando il solido compreso dalla base A D dal piano rettangolo A G dalla linea retta B G, e dalla superficie D G B F incurvata secondo la curvità della linea Pa-

rabolica F N B. Dico tal solido esser per tutto egualmente resistente. Sia segato dal piano C O parallelo all' A D, e intendansi due Leve divise, e posate sopra i sostegni A, C, e siano dell' una le distanze B A, A F, e dell' altra le B C, C N. E perchè nella Parabola F B A, la A B alla B C sta, come il quadrato della F A al quadrato di C N, è manifesto la distanza B A, dell' una Leva alla distanza B C dell'altra aver doppia proporzione di quella che ha l' altra distanza A F all' altra C N. E perchè la resistenza da pareggiarsi colla Leva B A alla resistenza da pareggiarsi colla Leva B C ha la medesima proporzione, che il rettangolo D A al rettangolo O C, la quale è la medesima, che ha la linea A F alla N C, che sono l' altre due distanze delle Leve, è manifesto per lo Lemma passato, che la medesima forza, che sendo applicata alla linea B G pareggerà la resistenza D A, pareggerà ancora la resistenza C O. Ed il medesimo si dimostrerà, segandosi il solido in qualsisia altro luogo: adunque tal solido Parabolico è per tutto egualmente resistente. Che poi segandosi il prisma secondo la linea Parabolica F N B, se ne levi la terza parte, si fa manifesto; perchè la semiparabola F N B A, e il rettangolo F B son basi di due solidi compresi tra due piani paralleli, cioè tra i rettangoli F B, D G, perlochè ritengono tra di loro la medesima proporzione,

che esse lor basi; ma il rettangolo F B è sesquialtero della semiparabola F N B A; adunque segando il prisma secondo la linea Parabolica, se ne leva la terza parte. Di qui si vede, come con diminuzion di peso di più di trentatrè per cento si posson far i travamenti senza diminuir punto la loro gagliardia, il che nei Navilii grandi in particolare per regger le coverte può esser di utile non piccolo; attesochè in cotali fabbriche la leggerezza importa infinitamente.

*Sagr.* Le utilità son tante, che lungo, o impossibile sarebbe il registrarle tutte. Ma io, lasciate queste da banda, avrei più gusto d'intender, che l'alleggerimento si faccia secondo le proporzioni assegnate. Che il taglio secondo la diagonale levi la metà del peso, l'intendo benissimo: ma che l'altro secondo la Parabolica porti via la terza parte del prisma, posso crederlo al Sig. Salviati sempre veridico, ma in ciò più della fede mi sarebbe grata la scienza.

*Salv.* Vorreste dunque aver la dimostrazione come sia vero, che l'eccesso del prisma sopra questo, che per ora chiamiamo solido Parabolico, sia la terza parte di tutto il prisma. So di averlo altra volta dimostrato; tenterò ora, se potrò rimettere insieme la dimostrazione, per la quale intanto mi sovviene, che mi serviva di certo Lemma di Archimede, posto da

esso nel libro delle spirali; ed è, che se quante linee si vogliono si eccederanno egualmente, e l' eccesso sia eguale alla minima di quelle, ed altrettante sieno, ciascheduna eguale alla massima; i quadrati di tutte queste saranno meno, che tripli dei quadrati di quelle, che si eccedono; ma i medesimi saranno ben più che tripli di quelli altri, che restano, trattone il quadrato della massima. Posto questo: sia in questo rettangolo A C B P (Fig. XXXVI.) inscritta la linea Parabolica A B; dobbiamo provare il triangolo misto B A P, i cui lati sono B P, P A, e base la linea Parabolica B A, esser la terza parte di tutto il rettangolo C P. Imperocchè se non è tale, sarà o più che la terza parte, o meno. Sia, se esser può, meno, ed a quello, che gli manca intendasi essere eguale lo spazio X. Dividendo poi il rettangolo C P continuatamente in parti eguali con linee parallele ai lati B P, C A, arriveremo finalmente a parti tali, che una di loro sarà minore dello spazio X. Or sia una di quelle il rettangolo O B, e per i punti, dove l' altre paralelle segano la linea Parabolica, facciansi passare le parallele alla A P, e qui intenderò circoscritta intorno al nostro triangolo misto una figura composta di rettangoli, che sono B O, I N, H M, F L, E K, G A, la qual figura sarà pur ancora meno, che la terza parte del rettangolo C P, essendo

che l'eccesso di essa figura sopra il triangolo misto è manco assai del rettangolo B O, il quale è ancor minore dello spazio X.

*Sagr.* Piano di grazia, che io non vedo, come l'eccesso di questa figura circoscritta sopra il triangolo misto sia manco assai del rettangolo B O.

*Salv.* Il rettangolo B O non è egli eguale a tutti questi rettangoletti, per i quali passa la nostra linea Parabolica: dico, di questi B I, I H, H F, F E, E G, G A? dei quali una parte sola resta fuori del triangolo misto; ed il rettangolo B O, non si è egli posto ancor minore dello spazio X? adunque se il triangolo insieme coll'X pareggiava per l'avversario la terza parte del rettangolo C P, la figura circoscritta, che al triangolo aggiugne tanto meno, che lo spazio X, resterà pur ancora minore della terza parte del rettangolo medesimo C P; ma questo non può essere, perchè ella è più della terza parte; adunque non è vero, che il nostro triangolo misto sia manco del terzo del rettangolo

*Sagr.* Ho intesa la soluzione del mio dubbio. Ma bisogna ora provarci, che la figura circoscritta sia più della terza parte del rettangolo G P, dove credo, che avremo assai più da fare.

*Salv.* Eh non ci è gran difficoltà. Imperocchè nella Parabola il quadrato della

linea D E al quadrato della Z G ha la medesima proporzione, che la linea D A alla A Z, che è quella, che ha il rettangolo K E al rettangolo A G, (per esser l'altezze A K, K L eguali;) adunque la proporzione, che ha il quadrato E D al quadrato Z G, cioè il quadrato L A al quadrato A K, l'ha ancora il rettangolo K E al rettangolo K Z. E nel medesimo modo appunto si proverà degli altri rettangoli L F, M H, N I, O B, star tra di loro come i quadrati delle linee M A, N A, O A, P A. Consideriamo adesso come la figura circoscritta è composta di alcuni spazj, che tra di loro stanno come i quadrati di linee, che si eccedono con eccessi eguali alla minima, e come il rettangolo C P è composto di altrettanti spazj, ciascuno eguale al massimo, che sono tutti i rettangoli eguali all' O B. Adunque pel Lemma di Archimede la figura circoscritta è più della terza parte del rettangolo C P; ma era anche minore, il che è impossibile; adunque il triangolo misto non è manco del terzo del rettangolo C P. Dico parimente, che non è più, imperocchè se è più del terzo del rettangolo C P, intendasi lo spazio X eguale all' eccesso del triangolo sopra la terza parte di esso rettangolo C P, e fatta la divisione, e suddivisione del rettangolo in rettangoli sempre eguali, si arriverà a tale, che uno di quelli sia minore dello spazio X. Sia fatta; e sia il ret-

tangolo B O minore dell' X, e descritta come sopra la figura, avremo nel triangolo misto inscritta una figura composta di rettangoli V O, T N, S M, R L, Q K, la quale non sarà ancora minore della terza parte del gran rettangolo C P. Imperocchè il triangolo misto supera di manco assai la figura inscritta di quello, che egli superi la terza parte di esso rettangolo C P, attesochè l' eccesso del triangolo sopra la terza parte del rettangolo C P è eguale allo spazio X, il quale è minore del rettangolo B O, e questo è anco minore assai dell' eccesso del triangolo sopra la figura inscrittagli; imperocchè ad esso rettangolo B O sono eguali tutti i rettangoletti A G, G E, E F, F H, H I, I B, dei quali sono ancora manco, che la metà, gli avanzi del triangolo sopra la figura inscritto. E però avanzando il triangolo la terza parte del rettangolo C P di più assai (avanzandolo dello spazio X,) che ei non avanza la sua figura inscritta, sarà tal figura ancora maggiore della terza parte del rettangolo C P; ma ella è minore pel Lemma supposto: imperocchè il rettangolo C P, come aggregato di tutti i rettangoli massimi, ai rettangoli componenti la figura inscritta ha la medesima proporzione, che l' aggregato di tutti i quadrati delle linee eguali alla massima ai quadrati delle linee, che si eccedono egualmente, trattone il quadrato della massima;

e però ( come dei quadrati accade ) tutto l' aggregato dei massimi ( che è il rettangolo C P ) è più che triplo dell' aggregato degli eccedentisi, trattone il massimo, che compongono la figura inscritta. Adunque il triangolo misto non è nè maggiore, nè minore della terza parte del rettangolo C P; è dunque eguale.

*Sagr.* Bella, e ingegnosa dimostrazione, e tanto più, quanto ella ci dà la quadratura della Parabola, mostrandola essere sesquiterza del triangolo iscrittogli, provando quello, che Archimede con due tra di loro diversissimi, ma amendue ammirabili progressi di molte proposizioni dimostrò. Come anco fu dimostrata ultimamente da Luca Valerio, altro Archimede secondo dell' età nostra, la qual dimostrazione è registrata nel libro, che egli scrisse del centro della gravità dei solidi.

*Salv.* Libro veramente da non esser posposto a qualsisia scritto dai più famosi Geometri del presente, e di tutti i secoli passati: il quale quando fu veduto dall' Accademico nostro, lo fece desistere dal proseguire i suoi trovati, che egli andava continuando di scrivere sopra il medesimo soggetto: giacchè vide il tutto tanto felicemente ritrovato, e dimostrato dal detto Sig. Valerio.

*Sagr.* Io era informato di tutto questo accidente dall' istesso Accademico; e l' aveva anco ricercato, che mi lasciasse

una volta vedere le sue dimostrazioni sia allora ritrovate, quando ei s' incontrò nel libro del Sig. Valerio; ma non mi successe poi il vederle.

*Salv.* Io ne ho copia, e le mostrerò a V. Sig. che averà gusto di vedere la diversità dei Metodi, con i quali camminano questi due Autori per l'investigazione delle medesime conclusioni, e loro dimostrazioni; dove anco alcune delle conclusioni hanno differente esplicazione, benchè in effetto egualmente vere.

*Sagr.* Mi sarà molto caro il vederle, e V. S. quando ritorni ai soliti congressi, mi farà grazia di portarle seco. Ma intanto essendo questa della resistenza del solido cavato dal prisma col taglio Parabolico operazione non men bella, che utile in molte opere Meccaniche, buona cosa sarebbe per gli Artefici l'aver qualche regola facile, e spedita per potere sopra il piano del prisma segnare essa linea Parabolica.

*Salv.* Modi di disegnar tali linee ve ne son molti, ma due sopra tutti gli altri speditissimi glie ne dirò io. Uno dei quali è veramente maraviglioso, poichè con esso in manco tempo, che col compasso altri disegnerà sottilmente sopra una carta quattro, o sei cerchi di differenti grandezze, io posso disegnare trenta, e quaranta linee Paraboliche non men giuste, sottili, e pulite delle circonferenze di essi cerchi.

Io ho una palla di bronzo esquisitamente rotonda non più grande di una noce; questa tirata sopra uno specchio di metallo tenuto non eretto all' Orizzonte, ma alquanto inchinato, sicchè la palla nel moto vi possa camminar sopra calcandolo leggermente nel muoversi, lascia una linea Parabolica sottilissimamente, e pulitissimamente descritta, e più larga, e più stretta, secondo che la projezione si sarà più, o meno elevata. Dove anco abbiamo chiara e sensata esperienza, il moto dei projetti farsi per linee Paraboliche: effetto non osservato prima, che dal nostro amico, il quale ne arreca anco la dimostrazione nel suo libro del moto, che vedremo insieme nel primo congresso. La palla poi per descrivere al modo detto le Parabole, bisogna con maneggiarla alquanto colla mano scaldarla, ed alquanto inumidirla, che così lascerà più apparenti sopra lo specchio i suoi vestigj. L'altro modo per disegnar la linea, che cerchiamo, sopra il prisma, procede così. Ferminsi ad alto due chiodi in una parete equidistanti all' Orizzonte, e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo, su il quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga, che la sua sacca si stenda, quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura Parabolica, sicchè andando punteggiando sopra

il muro la strada, che vi fa essa catenella, avremo descritta un' intera Parabola: la quale con un perpendicolo, che penda dal mezzo di quei due chiodi, si dividerà in parti eguali. Il trasferir poi tal linea sopra le faccie opposte del prisma non ha difficoltà nessuna; sicchè ogni mediocre artefice lo saprà fare. Potrebbesi anco coll' ajuto delle linee geometriche segnate sul compasso del nostro amico senza altra fattura andar su l' istessa faccia del prisma punteggiando la linea medesima.

Abbiamo sin qui dimostrate tante conclusioni attenenti alla contemplazione di queste resistenze dei solidi all' essere spezzati, coll' aver prima aperto l' ingresso a tale scienza col suppor come nota la resistenza per diritto, che si potrà conseguentemente camminar avanti ritrovandone altre ed altre conclusioni, e loro dimostrazioni di quelle, che in natura sono infinite. Solo per ora per ultimo termine degli odierni ragionamenti voglio aggiugnere la speculazione delle resistenze dei solidi vacui, de' quali l' arte, e più la natura si serve in mille operazioni; dove senza crescer peso si cresce grandemente la robustezza: come si vede nell' ossa degli uccelli, ed in moltissime canne, che son leggere, e molto resistenti al piegarsi, e rompersi: che se un fil di paglia, che sostien una spiga più grave di tutto il gambo, fosse fatto della medesima quantità di materia, ma

fosse massiccio, sarebbe assai meno resistente al piegarsi, ed al rompersi. E con tal ragione ha osservato l'arte, e confermato l'esperienza, che un'asta vota, o una canna di legno, o di metallo è molto più salda, che se fosse di altrettanto peso, e della medesima lunghezza massiccia, che in conseguenza sarebbe più sottile, e però l'arte ha trovato di far vote dentro le lance, quando si desideri averle gagliarde, e leggere. Mostreremo per tanto, come

Le resistenze di due cilindri eguali, ed egualmente lunghi, l'uno dei quali sia voto, e l'altro massiccio, hanno tra di loro la medesima proporzione, che i lor diametri.

Sieno la canna, o cilindro voto A E, (Fig. XXXVII) ed il cilindro I N massiccio eguali in peso, ed egualmente lunghi. Dico, la resistenza della canna A E all' esser rotta alla resistenza del cilindro solido I N aver la medesima proporzione, che il diametro A B al diametro I L. Il che è assai manifesto, perchè essendo la canna, e il cilindro I N eguali, ed egualmente lunghi, il cerchio I L, base del cilindro, sarà eguale alla ciambella A B base della canna A E, (chiamo ciambella la superficie, che resta, tratto un cerchio minore dal suo concentrico maggiore) e però le loro resistenze assolute saranno eguali: ma perchè nel romper in traverso ci serviamo nel cilindro I N della lunghezza L N per

Leva, e per sostegno del punto L, e del semidiametro, o diametro L I per contralleva; e nella canna la parte della Leva, cioè la linea B E è eguale alla L N, ma la contralleva oltre al sostegno B è il diametro, o semidiametro A B; resta manifesto la resistenza della canna superar quella del cilindro solido secondo l'eccesso del diametro A B sopra il diametro I L, che è quello, che cercavamo. S'acquista dunque di robustezza nella canna vota sopra la robustezza del cilindro solido secondo la proporzione dei diametri, tuttavolta però che amendue siano dell'istessa materia, peso, e lunghezza. Sarà bene, che conseguentemente andiamo investigando quello, che accaggia negli altri casi indifferentemente tra tutte le canne, e cilindri solidi egualmente lunghi; benchè in quantità di peso diseguali, e più e meno evacuati. E prima dimostreremo, come,

Data una canna vota, si possa trovare un cilindro pieno eguale ad essa.

Facilissima è tale operazione. Imperocchè sia la linea A B (Fig. XXXVIII.) diametro della canna, e C D diametro del voto. Applichisi nel cerchio maggiore la linea A E eguale al diametro C D, e congiungasi la E B. E perchè nel mezzo cerchio A E B l'angolo E è retto, il cerchio, il cui diametro è A B, sarà eguale alli due cerchi dei diametri A E, E B;

# GIORNATA TERZA.

## DE MOTU LOCALI.



De subjecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam. MOTU nil forte antiquius in Natura, et circa eum volumina nec pauca, nec parva a Philosophis conscripta reperiuntur. Symptomatum tamen, quae complura et scitu digna insunt in eo, adhuc inobservata, necdum demonstrata comperio. Leviora quaedam adnotantur: ut gratia exempli, naturalem motum gravium descendentium continue accelerari. Verum juxta quam proportionem ejus fiat acceleratio, proditum hucusque non est: nullus enim, quod sciam, demonstravit, spatia a mobili descendente ex quiete peracta in temporibus aequalibus, eam inter se re-

tinere rationem, quam habent numeri impares ab unitate consequentes. Observatum est, missilia, seu projecta lineam qualitercumque curvam designare; verumtamen eam esse Parabolam nemo prodidit. Haec ita esse, et alia non pauca, nec minus scitu digna, a me demonstrabuntur, et quod pluris faciendum censeo, aditus et accessus ad amplissimam, praestantissimamque scientiam, cujus hi nostri labores erunt elementa, recludetur: in qua ingenia meo perspicaciora abditiores recessus penetrabunt.

Tripartito dividimus hanc tractationem. In prima parte consideramus ea, quae spectant ad Motum aequabilem, seu uniformem. In secunda de Motu naturaliter accelerato scribimus. In tertia de Motu violento, seu de projectis.

## DE MOTU AEQUABILI.

Circa Motum aequabilem, seu uniformem unica opus habemus definitione, quam ejusmodi profero.

### DEFINITIO.

*AEqualem, seu uniformem motum intelligo eum, cujus partes quibuscumque temporibus aequalibus a mobili peractae, sunt inter se aequales.*

## ADMONITIO.

Visum est addere veteri definitioni ( quae simpliciter appellat motum aequabilem, dum temporibus aequalibus aequalia transiguntur spatia) particulam, quibuscumque, hoc est omnibus temporibus aequalibus: fieri enim potest, ut temporibus aliquibus aequalibus mobile pertranseat spatia aequalia, dum tamen spatia transacta in partibus eorundem temporum minoribus, licet aequalibus, aequalia non sint. Ex allata definitione quatuor pendent Axiomata: scilicet

## AXIOMA I.

*Spatium transactum tempore longiori in eodem Motu aequabili majus esse spatio transacto tempore breviori.*

## AXIOMA II.

*Tempus, quo majus spatium conficitur in eodem motu aequabili, longius est tempore, quo conficitur spatium minus.*

## AXIOMA III.

*Spatium a majori velocitate confectum tempore eodem majus est spatio confecto a minori velocitate.*

## AXIOMA IV.

*Velocitas, qua tempore eodem conficitur majus spatium, major est velocitate, qua conficitur spatium minus.*

## THEOREMA I. PROPOSITIO I.

*Si Mobile aequabiliter latum, eademque cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta.*

Pertranseat enim Mobile aequabiliter latum eadem cum velocitate duo spatia (Fig. XL.) A B, B C, et sit tempus motus per A B, D E; tempus vero motus per B C esto E F. Dico, ut spatium A B ad spatium B C, ita esse tempus D E ad tempus E F. Protrahantur utrinque spatia, et tempora versus G, H, et I, K, et in A G sumantur quotcunque spatia ipsi A B aequalia, et totidem tempora in D I tempori D E similiter aequalia; et rursus in C H sumantur secundum quamcunque multitudinem spatia ipsi C B aequalia, et totidem tempora in F K tempori E F aequalia. Erunt jam spatium B G, et tempus E I aeque multiplicia spatii B A, et temporis E D, juxta quamcunque multiplicationem accepta, et similiter spatium H B, et tempus K E, spatii C B, temporisque F E aeque multiplicia in qualibet multiplicatione.

Et quia D E est tempus lationis per A B, erit totum E I tempus totius B G, cum motus ponatur aequabilis, sintque in E I tot tempora ipsi D E aequalia, quot sunt in B G spatia aequalia B A, et similiter concludetur K E esse tempus lationis per H B. Cum autem motus ponatur aequabilis, si spatium G B esset aequale ipsi B H, tempus quoque I E tempori E K foret aequale, et si G B majus sit quam B H, etiam I E quam E K majus erit, et si minus, minus. Sunt itaque quatuor magnitudines: A B prima, B C secunda, D E tertia, E F quarta, et primae, et tertiae, nempe spatii A B, et temporis D E, sumpta sunt aeque multiplicia juxta quamcunque multiplicationem tempus I E, et spatium G B, ac demonstratum est haec vel una aequari, vel una deficere, vel una excedere tempus E K, et spatium B H, aeque multiplicia scilicet secundae, et quartae. Ergo prima ad secundam, nempe spatium A B ad spatium B C, eandem habet rationem, quam tertia et quarta, nempe tempus D E ad tempus E F, quod erat demonstrandum.

## THEOR. II. PROP. II.

*Si mobile temporibus aequalibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia.*

Assumpta enim superiori figura sint duo spatia A B, B C transacta aequalibus temporibus, spatium quidem A B cum velocitate D E, et spatium B C cum velocitate E F. Dico, spatium A B ad spatium B C esse, ut D E velocitas ad velocitatem E F; sumptis enim utrinque ut supra, et spatiorum, et velocitatum aeque multiplicibus secundum quamcunque multiplicationem scilicet G B, et I E ipsorum A B, et D E, pariterque H B, K E ipsorum B C, E F, concludetur eodem modo ut supra multiplicia G B. I E vel una deficere, vel aequari, vel excedere aeque multiplicia B H, E K; igitur et manifestum est propositum.

## THEOR. III. PROP. III.

*Inaequalibus velocitatibus per idem spatium latorum tempora velocitatibus e contrario respondent.*

Sint velocitates inaequales A ( Fig. XLI. ) major, B minor, et secundum utranque fiat motus per idem spatium C D. Dico tempus, quo A velocitas permeat spatium C D, ad tempus, quo velocitas B idem spatium permeat, esse, ut velocitas B ad velocitatem A. Fiat enim ut A ad B, ita C D ad C E; erit igitur ex praecedenti tempus, quo A velocitas conficit C D, idem cum tempore, quo B conficit C E; sed

tempus, quo velocitas B conficit C E, ad tempus quo eadem conficit C D, est ut C E ad C D; ergo tempus, quo velocitas A conficit C D, ad tempus quo velocitas B idem C D conficit, est ut C E ad C D, hoc est ut velocitas B ad velocitatem A, quod erat intentum.

## THEOR. IV. PROP. IV.

*Si duo mobilia ferantur motu aequabili, inaequali tamen velocitate; spatia temporibus inaequalibus ab ipsis peracta, habebunt rationem compositam ex ratione velocitatum, et ex ratione temporum.*

Mota sint duo mobilia E, F ( Fig. XLII ) motu aequabili, et ratio velocitatis mobilis E ad velocitatem mobilis F sit, ut A ad B; temporis vero, quo movetur E ad tempus, quo movetur F, ratio sit, ut C ad D. Dico spatium peractum ab E cum velocitate A in tempore C, ad spatium peractum ab F cum velocitate B in tempore D, habere rationem compositam ex ratione velocitatis A ad velocitatem B, et ex ratione temporis C ad tempus D. Sit spatium ab E cum velocitate A in tempore C peractum G, et ut velocitas A ad velocitatem B, ita fiat G ad I, ut autem tempus C ad tempus D, ita sit I ad L: constat I esse spatium, quo movetur F in tempore eodem, in quo E motum est per G, cum spatia G, I sint ut velocitates A, B; et cum sit ut

tempus C ad tempus D, ita I ad L: sit autem I spatium, quod conficitur a mobili F in tempore C, erit L spatium, quod conficitur ab F in tempore D cum velocitate B: ratio autem G ad L componitur ex rationibus G ad I, et I ad L, nempe ex rationibus velocitatis A ad velocitatem B, et temporis C ad tempus D; ergo patet propositum.

## THEOR. V. PROP. V.

*Si duo mobilia aequabili motu ferantur, sint tamen velocitates inaequales, et inaequalia spatia peracta, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum, et ex ratione velocitatum contrarie sumptarum.*

Sint duo Mobilia A, B, ( Fig XLIII. ) sitque velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B ut V ad T, spatia autem peracta sint ut S ad R. Dico rationem temporis, quo motum est A, ad tempus, quo motum est B, compositam esse ex ratione velocitatis T ad velocitatem V, et ex ratione spatii S ad spatium R. Sit ipsius motus A tempus C, et ut velocitas T ad velocitatem V, ita sit tempus C ad tempus E. Et cum C sit tempus, in quo A cum velocitate V conficit spatium S, sitque ut velocitas T mobilis B ad velocitatem V, ita tempus ad tempus E, erit tempus E illud, in quo mobile B conficeret idem spatium S. Fiat tertio, ut spatium S ad spa-

tium R, ita tempus E ad tempus G; constat G esse tempus, quo B conficeret spatium R. Et quia ratio C ad G componitur ex rationibus C ad E, et E ad G; est autem ratio C ad E eadem cum ratione velocitatum mobilium A, B contrarie sumptarum, hoc est, cum ratione T ad V; ratio vero E ad G est eadem cum ratione spatiorum S, R; ergo patet propositum.

## THEOR. VI. PROP. VI.

*Si duo Mobilia aequabili motu ferantur, ratio velocitatum ipsorum composita erit ex ratione spatiorum peractorum et ex ratione temporum contrarie sumptorum.*

Sint duo Mobilia A, B aequabili motu lata: sint autem spatia ab illis peracta in ratione V ad T, tempora vero sint ut S ad R. Dico velocitatem mobilis A ad velocitatem ipsius B habere rationem compositam ex ratione spatii V ad spatium T, et temporis R ad tempus S.

Sit velocitas C ea, cum qua mobile A conficit spatium V in tempore S, et quam rationem habet spatium V ad spatium T, hanc habeat velocitas C ad aliam E; erit E velocitas, cum qua mobile B conficit spatium T in tempore eodem S: quod si fiat ut tempus R ad tempus S, ita velocitas E ad aliam G; erit velocitas G illa, secundum quam mobile B conficit spatium T in

tempore R. Habemus itaque velocitatem C, cum qua mobile A conficit spatium V in tempore S, et velocitatem G, cum qua mobile B conficit spatium T in tempore R, et est ratio C ad G composita ex rationibus C ad E, et E ad G; ratio autem C ad E posita est eadem cum ratione spatii V ad spatium T; ratio vero E ad G, est eadem cum ratione R ad S; ergo pater propositum.

*Salv.* Questo, che abbiamo veduto, è quanto il nostro Autore ha scritto del moto equabile. Passeremo dunque a più sottile, e nuova contemplazione intorno al moto naturalmente accelerato, quale è quello, che generalmente è esercitato dai mobili gravi discendenti, ed ecco il titolo, e l'introduzione.

## DE MOTU NATURALITER ACCELERATO.

Quae in motu aequabili contingunt accidentia, in praecedenti libro considerata sunt: modo de motu accelerato pertractandum. Et primo definitionem ei, quo utitur natura, apprime congruentem investigare, atque explicare convenit. Quamvis enim aliquam lationis speciem ex arbitrio confingere, et consequentes ejus pas-

siones contemplari non sit inconveniens, (ita enim qui Helicas, aut Conchoides lineas ex motibus quibusdam exortas, licet talibus non utatur natura, sibi finxerunt, earum symptomata ex suppositione demonstrarunt cum laude) tamen quandoquidem quadam accelerationis specie gravium descendentium utitur natura, eorundem speculari passiones decrevimus, si eam, quam allaturi sumus de nostro motu accelerato definitionem cum essentia motus naturaliter accelerati congruere contigerit. Quod tandem post diuturnas mentis agitationes reperisse confidimus ea potissimum ducti ratione, quia symptomatis deinceps a nobis demonstratis apprime respondere, atque congruere videntur ea, quae naturalia experimenta sensui repraesentant. Postremo ad investigationem motus naturaliter accelerati nos quasi manu duxit animadversio consuetudinis, atque instituti ipsiusmet naturae in ceteris suis operibus omnibus, in quibus exerendis uti consuevit mediis primis, simplicissimis, facillimis: neminem enim esse arbitror, qui credat natatum, aut volatum, simpliciori, aut faciliori modo exerceri posse, quam eo ipso, quo pisces, et aves instinctu naturali utuntur. Dum igitur lapidem ex sublimi a quiete descendentem nova deinceps velocitatis acquirere incrementa animadverto, cur talia additamenta simplicissima, atque omnibus magis obvia ratione fieri non cre-

dam? Quod si attente inspiciamus, nullum additamentum, nullum incrementum magis simplex inveniemus, quam illud, quod semper eodem modo superaddit. Quod facile intelligemus maximam temporis, atque motus affinitatem inspicientes: sicut enim motus aequabilitas, et uniformitas per temporum, spatiorumque aequalitates definitur, atque concipitur (lationem enim tunc aequabilem appellamus, cum temporibus aequalibus æqualia conficiunt spatia) ita per easdem æqualitates partium temporis incrementa celeritatis simpliciter facta percipere possumus: mente concipientes motum illum uniformiter, eodemque modo continue acceleratum esse, dum temporibus quibuscunque aequalibus aequalia ei superaddantur celeritatis additamenta. Adeo ut sumptis quotcunque temporis particulis aequalibus a primo instanti, in quo mobile recedit a quiete, et descensum aggreditur, celeritatis gradus in prima cum secunda temporis particula acquisitus duplus sit gradus, quem acquisivit mobile in prima particula: gradus vero, quem obtinet in tribus particulis, triplus, quem in quatuor, quadruplus ejusdem gradus primi temporis. Ita ut (clarioris intelligentiæ causa) si mobile lationem suam continuaret juxta gradum, seu momentum velocitatis in prima temporis particula acquisitae, motumque suum deinceps aequabiliter cum tali gradu extenderet, latio haec duplo

esset tardior ea, quam juxta gradum velocitatis in duabus temporis particulis acquisitæ obtineret; et sic a recta ratione absonum nequaquam esse videtur, si accipiamus intentionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem: ex quo definitio Motus, de quo acturi sumus, talis accipi potest. Motum æquabiliter, seu uniformiter acceleratum dico illum, qui a quiete recedens temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.

*Sagr.* Io, siccome fuor di ragione mi opporrei a questa, o ad altra definizione, che da qualsivoglia Autore fusse assegnata, essendo tutte arbitrarie; così ben posso senza offesa dubitare; se tal definizione concepita, ed ammessa in astratto, si adatti, convenga, e si verifichi in quella sorta di moto accelerato, che i gravi naturalmente discendenti vanno esercitando. E perchè pare, che l'Autore ci prometta, che tale, quale egli ha definito, sia il moto naturale dei gravi, volentieri mi sentirei rimuover certi scrupoli, che mi perturbano la mente, acciò poi con maggiore attenzione potessi applicarmi alle proporzioni, e lor dimostrazioni, che si attendono.

*Salv.* È bene, che V. S. ed il Sig. Simplicio vadano proponendo le difficoltà: le quali mi vo immaginando, che sieno per essere quelle stesse, che a me ancora sovvennero, quando primieramente vidi

questo trattato, e che o dall' Autor medesimo ragionandone seco mi saran sepite, o taluna ancora da me stesso col pensarvi rimossa.

*Sagr.* Mentre io mi vo figurando un mobile grave discendente partirsi dalla quiete, cioè dalla privazione di ogni velocità, ed entrare nel moto, ed in quello andarsi velocitando secondo la proporzione, che cresce il tempo dal primo instante del moto; ed avere v. gr. in otto battute di polso acquistato otto gradi di velocità, della quale nella quarta battuta ne aveva guadagnati quattro, nella seconda due, nella prima uno, essendo il tempo suddivisibile in infinito, ne seguita, che diminuendosi sempre con tal ragione l' antecedente velocità, grado alcuno non sia di velocità così piccolo, o vogliamo dir di tardità così grande, nel quale non si sia trovato costituito l' istesso mobile dopo la partita dall' infinita tardità, cioè dalla quiete. Talchè se quel grado di velocità, che egli ebbe alle quattro battute di tempo, era tale, che mantenendola equabile avrebbe corso due miglia in un' ora, e col grado di velocità, che ebbe nella seconda battuta, avrebbe fatto un miglio per ora, convien dire, che negl' instanti del tempo più e più vicini al primo della sua mossa dalla quiete, si trovasse così tardo, che non avrebbe (seguitando di muoversi con tal tardità) passato un miglio in un' ora,

nè in un giorno, nè in un anno, nè in mille, nè passato anco un sol palmo in tempo maggiore: accidente, al quale pare che assai male agevolmente si accomodi l'immaginazione, mentre che il senso ci mostra un grave cadente venir subito con gran velocità.

*Salv.* Questa è una delle difficoltà, che a me ancora su il principio dette che pensare, ma non molto dopo la rimossi; ed il rimuoverla fu effetto della medesima esperienza, che di presente a voi la suscita. Voi dite parervi, che l'esperienza mostri, che appena partitosi il grave dalla quiete, entri in una molto notabile velocità; ed io dico, che questa medesima esperienza ci chiarisce i primi impeti del cadente, benchè gravissimo, esser lentissimi e tardissimi. Posate un grave sopra una materia cedente, lasciandovelo fin che prema, quanto egli può colla sua semplice gravità: è manifesto, che alzandolo un braccio, o due, lasciandolo poi cadere sopra la medesima materia, farà colla percossa nuova pressione, e maggiore, che la fatta prima col solo peso; e l'effetto sarà cagionato dal mobile cadente congiunto colla velocità guadagnata nella caduta, il quale effetto sarà più e più grande, secondo che da maggior altezza verrà la percossa, cioè secondo che la velocità del percuziente sarà maggiore. Quanta dun-

que sia la velocità di un grave cadente, lo potremo noi senza errore conghietturare dalla qualità, e quantità della percossa. Ma ditemi, Signori, quel mazzo che lasciato cadere sopra un palo dall'altezza di quattro braccia lo ficca in terra, v. gr. quattro dita, venendo dall' altezza di due braccia lo caccerà assai manco, e meno dall' altezza di uno, e manco da un palmo; e finalmente sollevandolo un dito, che farà di più, che se senza percossa vi fusse posto sopra? certo pochissimo, ed operazione del tutto impercettibile sarebbe, se si elevasse, quanto è grosso un foglio. E perchè l'effetto della percossa si regola dalla velocità del medesimo percuziente, chi vorrà dubitare, che lentissimo sia il moto, e più che minima la velocità, dove l'operazione sua sia impercettibile? Vedano ora quanta sia la forza della verità, mentre l'istessa esperienza, che pareva nel primo aspetto mostrare una cosa, meglio considerata ci assicura del contrario. Ma senza ridursi a tale esperienza, (che senza dubbio è concludentissima) mi pare, che non sia difficile col semplice discorso penetrare una tal verità. Noi abbiamo un sasso grave sostenuto nell'aria in quiete; si libera dal sostegno, e si pone in libertà; e come più grave dell'aria, vien discendendo al basso, e non con moto equabile, ma lento nel principio, e continuamente dopo accelerato; ed essendo

che la velocità è augumentabile, e menomabile in infinito, qual ragione mi persuaderà, che tal mobile partendosi da una tardità infinita (che tale è la quiete) entri immediatamente in dieci gradi di velocità più, che in una di quattro, o in questa prima, che in una di due, di uno, di un mezzo, di un centesimo? ed in somma in tutte le minori in infinito? Sentite in grazia. Io non credo, che voi fuste renitenti a concedermi, che l'acquisto dei gradi di velocità del sasso cadente dallo stato di quiete possa farsi col medesimo ordine, che la diminuzione, e perdita dei medesimi gradi, mentre da virtù impellente fusse ricacciato in su alla medesima altezza: ma quando ciò sia, non vedo, che si possa dubitare, che nel diminuirsi la velocità del sasso ascendente consumandola tutta possa pervenire allo stato di quiete prima, che passar per tutti i gradi di tardità.

*Simp.* Ma se i gradi di tardità maggiore e maggiore sono infiniti, giammai non si consumeranno tutti; onde tal grave ascendente non si condurrà mai alla quiete, ma infinitamente si moverà, ritardandosi sempre: cosa che non si vede accadere.

*Salv.* Accaderebbe cotesto, Sig. Simp. quando il mobile andasse per qualche tempo trattenendosi in ciaschedun grado; ma egli vi passa solamente senza dimorarvi oltre a un istante, e perchè in ogni tempo quanto, ancorchè piccolissimo, sono infini-

ti instanti, però son bastanti a rispondere agli infiniti gradi di velocità diminuita. Che poi tal grave ascendente non persista per verun tempo quanto in alcun medesimo grado di velocità, si fa manifesto così: perchè se assegnato qualche tempo quanto, nel primo instante di tal tempo, ed anco nell' ultimo il mobile si trovasse avere il medesimo grado di velocità, potrebbe da questo secondo grado esser parimente sospinto in su per altrettanto spazio, siccome dal primo fu portato al secondo, e per l' istessa ragione passerebbe dal secondo al terzo, e finalmente continuerebbe il suo moto uniforme in infinito.

*Sagr.* Da questo discorso mi par che si potrebbe cavare una assai congrua ragione della quistione agitata tra i Filosofi, qual sia la causa dell' accelerazione del moto naturale dei gravi. Imperocchè mentre io considero, nel grave cacciato in su andarsi continuamente diminuendo quella virtù impressagli dal proiciente, la quale, sinchè fu superiore all'altra contraria della gravità, lo sospinse in alto, giunte che sieno questa e quella all' equilibrio, resta il mobile di più salire, e passa per lo stato della quiete, nel quale l'impeto impresso non è altrimenti annichilato, ma solo consumatosi quell' eccesso, che pur dianzi aveva sopra la gravità del mobile, per lo quale prevalendogli lo spigneva in su. Continuandosi poi la diminuzione di

questo impeto straniero, e in conseguenza cominciando il vantaggio ad esser dalla parte della gravità, comincia altresì la scesa, ma lenta per lo contrasto della virtù impressa, buona parte della quale rimane ancora nel mobile: ma perchè ella pur va continuamente diminuendosi, venendo sempre con maggior proporzione superata dalla gravità, quindi nasce la continua accelerazione del moto.

*Simp.* Il pensiero è arguto: ma più sottile che saldo. Imperocchè quando pur sia concludente, non soddisfà se non a quei moti naturali, ai quali sia preceduto un moto violento, nel quale resti ancora vivace parte della virtù esterna: ma dove non sia tal residuo, ma si parta il mobile da una antiquata quiete, cessa la forza di tutto il discorso.

*Sagr.* Credo, che voi siate in errore, e che questa distinzione di casi, che fate, sia superflua, o per dir meglio nulla. Però ditemi, se nel projetto può esser talvolta impressa dal proiciente molta, e talora poca virtù; sicchè possa esser scagliato in alto cento braccia, ed anco venti, o quattro, o uno?

*Simp.* Non è dubbio, che sì?

*Sagr.* E non meno potrà cotal virtù impressa di così poco superar la resistenza della gravità, che non l'alzi più di un dito; e finalmente può la virtù del proiciente esser solamente tanta, che pareggi per l'ap-

punto la resistenza della gravità, sicchè il mobile sia non cacciato in alto, ma solamente sostenuto. Quando dunque voi reggete in mano una pietra, che altro gli fate voi, che l'imprimergli tanta virtù impellente all' in su, quanta è la facoltà della sua gravità traente in giù? E questa vostra virtù non continuate voi di conservargliela impressa per tutto il tempo, che voi la sostenete in mano? Si diminuisce ella forse per la lunga dimora, che voi la reggete? E questo sostentamento, che vieta la scesa al sasso, che importa, che sia fatto più dalla vostra mano, che da una tavola o da una corda, dalla quale ei sia sospeso? Certo niente. Concludete pertanto, Sig. Simpl. che il precedere alla caduta del sasso una quiete lunga o breve, o momentanea, non fa differenza alcuna, sicchè il sasso non parta sempre affetto da tanta virtù contraria alla sua gravità, quanta appunto bastava a tenerlo in quiete.

*Salv.* Non mi par tempo opportuno di entrare al presente nell' investigazione della causa dell' accelerazione del moto naturale, intorno alla quale da varj Filosofi varie sentenze sono state prodotte: riducendola alcuni all' avvicinamento al centro, altri al restar successivamente manco parti del mezzo da fendersi: altri a certa estrusione del mezzo ambiente, il quale nel ricongiugnersi a tergo del mobile lo va premendo, e continuatamente scaccian-

do, le quali fantasie con altre appresso converrebbe andare esaminando, e con poco guadagno risolvendo. Per ora basta al nostro Autore, che noi intendiamo, che egli ci vuole investigare, e dimostrare alcune passioni di un moto accelerato, (qualunque si sia la causa della sua accelerazione) talmente che i momenti della sua velocità vadano accrescendosi dopo la sua partita dalla quiete con quella semplicissima proporzione, colla quale cresce la continuazion del tempo, che è quanto dire, che in tempi eguali si facciano eguali additamenti di velocità. E se s'incontrerà, che gli accidenti, che poi saranno dimostrati, si verifichino nel moto dei gravi naturalmente discendenti, ed accelerati, potremo reputare, che l'assunta definizione comprenda cotal moto dei gravi, e che vero sia, che l'accelerazione loro vada crescendo secondo che cresce il tempo, e la durazione del moto.

*Sagr.* Per quanto per ora mi si rappresenta all'intelletto, mi pare, che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire senza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato esser quello, nel quale la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio, che si va passando; sicchè per esempio il grado di velocità acquistato dal mobile nella scesa di quattro braccia, fusse doppio di quello, che egli ebbe, sceso che fu lo spazio di due,

e questo doppio del conseguito nello spazio del primo braccio. Perchè non mi par che sia da dubitare, che quel grave che viene dall' altezza di sei braccia, non abbia, e percuota con impeto doppio di quello che ebbe, sceso che fu tre braccia, e triplo di quello che ebbe alle due, e sescuplo dell' avuto nello spazio di uno.

*Salv.* Io mi consolo assai d'aver avuto un tanto compagno nell' errore; e più vi dirò, che il vostro discorso ha tanto del verisimile e del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi negò, quando io glielo proposi, d'esser egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. Ma quello, di che io poi sommamente mi maravigliai, fu il vedere scoprir con quattro semplicissime parole, non pur false, ma impossibili due proposizioni, che hanno del verisimile tanto, che avendole io proposte a molti, non ho trovato, chi liberamente non me l'ammettesse.

*Simpl.* Veramente io sarei del numero dei conceditori: e che il grave discendente *vires acquirat eundo*, crescendo la velocità a ragion dello spazio, e che il momento dell' istesso percuziente sia doppio, venendo da doppia altezza, mi pajono proposizioni da concedersi senza repugnanza o controversia.

*Salv.* E pur son tanto false, e impossibili, quanto che il moto si faccia in un istante. Ed eccovene chiarissima dimostra-

zione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione, che gli spazj passati, o da passarsi, tali spazj vengono passati in tempi eguali; se dunque le velocità, colle quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furon doppie delle velocità, colle quali passò le due prime braccia (siccome lo spazio è doppio dello spazio) adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; ma passare il medesimo mobile le quattro braccia, e le due nell' istesso tempo non può aver luogo fuor che nel moto instantaneo; ma noi vediamo, che il grave cadente fa suo moto in tempo, ed in minore passa le due braccia, che le quattro; adunque è falso, che la velocità sua cresca come lo spazio. L'altra proposizione si dimostra falsa colla medesima chiarezza. Imperocchè essendo quello che percuote il medesimo; non può determinarsi la differenza e momento delle percosse, se non dalla differenza della velocità. Quando dunque il percuziente venendo da doppia altezza facesse percossa di doppio momento, bisognerebbe, che percuotesse con doppia velocità; ma la doppia velocità passa il doppio spazio nell' istesso tempo, e noi vediamo il tempo della scesa dalla maggiore altezza esser più lungo.

*Sagr.* Troppa evidenza, troppa agevolezza è questa, colla quale manifestate conclusioni ascose; questa somma facilità le rende di minor pregio, che non erano,

mentre stavano sotto contrario sembiante. Poco penso io che prezzerebbe l'universale notizie acquistate con sì poca fatica, in comparazione di quelle, intorno alle quali si fanno lunghe ed inesplicabili altercazioni.

*Salv.* A quelli, i quali con gran brevità e chiarezza mostrano le fallacie di proposizioni state comunemente tenute per vere dall' universale, danno assai comportabile sarebbe il riportarne solamente disprezzo in luogo di aggradimento, ma bene spiacevole e molesto riesce cert' altro affetto, che suol talvolta destarsi in alcuni, che pretendendo nei medesimi studj almeno la parità con chiunque si sia, si vedono aver trapassate per vere conclusioni, che poi da un altro con breve e facile discorso vengono scoperte e dichiarate false. Io non chiamerò tale affetto invidia, solita a convertirsi poi in odio ed ira contro agli scopritori di tali fallacie, ma lo dirò uno stimolo, e una brama di voler più presto mantener gli errori inveterati, che permettere, che si ricevano le verità nuovamente scoperte, la qual brama talvolta gl' induce a scrivere in contraddizione a quelle verità pur troppo internamente conosciute anco da loro medesimi solo per tener bassa nel concetto del numeroso e poco intelligente vulgo l'altrui reputazione. Di simili conclusioni false ricevute per vere, e di agevolissima confutazione, non piccol numero ne ho io sentite dal nostro

Accademico; di parte delle quali ho anco tenuto registro.

*Sagr.* E V. S. non dovrà privarcene, ma a suo tempo farcene parte, quando ben anco bisognasse in grazia loro fare una particolar sessione. Per ora continuando il nostro filo parmi, che sin qui abbiamo fermata la definizione del moto uniformemente accelerato, del quale si tratta nei discorsi, che seguono, ed è:

*Motum aequabiliter, seu uniformiter acceleratum dicimus eum, qui a quiete recedens temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.*

*Salv.* Fermata cotal definizione un solo principio domanda, e suppone per vero l'Autore, cioè:

*Accipio, gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorundem planorum elevationes aequales sint.*

Chiama la elevazione di un piano inclinato la perpendicolare, che dal termine sublime di esso piano casca sopra la linea orizzontale prodotta per l'infimo termine di esso piano inclinato, come per intelligenza, essendo la linea B A parallela all'orizzonte, sopra il quale sieno inclinati li due piani C A, C D (Fig. XLIV.), la perpendicolare C B cadente sopra l'orizzontale B A, chiama l'Autore la elevazione dei piani C A, C D, e suppone, che i

gradi di velocità del medesimo mobile scendente per li piani inclinati C A, C D, acquistati nei termini A, D, sieno eguali, per esser la loro elevazione l'istessa C B. E tanto anco si dee intendere il grado di velocità, che il medesimo cadente dal punto C avrebbe nel termine B.

*Sagr.* Veramente mi par che tal supposto abbia tanto del probabile, che meriti di esser senza controversia conceduto, intendendo sempre, che si rimuovano tutti gl' impedimenti accidentarj ed esterni, e che i piani sieno ben solidi e tersi, ed il mobile di figura perfettissimamente rotonda, sicchè ed il piano, ed il mobile non abbiano scabrosità. Rimossi tutti i contrasti ed impedimenti, il lume naturale mi detta senza difficoltà, che una palla grave e perfettamente rotonda scendendo per le linee C A, C D, C B, giugnerebbe nei termini A, D, B, con impeti eguali.

*Salv.* Voi molto probabilmente discorrete, ma oltre al verisimile voglio con una esperienza crescer tanto la probabilità, che poco gli manchi all' agguagliarsi ad una ben necessaria dimostrazione. Figuratevi questo foglio essere una parete eretta all' orizzonte, e da un chiodo fitto in essa pendere una palla di piombo d'un'oncia, o due, sospesa dal sottil filo A B (Fig. XLV.) lungo due, o tre braccia perpendicolare all' orizzonte, e nella parete segnate una linea orizzontale D C se-

gante a squadra il perpendicolo A B, il quale sia lontano dalla parete due dita in circa, trasferendo poi il filo A B colla palla in A C, lasciate essa palla in libertà, la quale primieramente vedrete scendere descrivendo l' arco C B D, e di tanto trapassare il termine B, che scorrendo per l' arco B D sormonterà fino quasi alla segnata parallela C D, restando di pervenirvi per piccolissimo intervallo, toltogli il precisamente arrivarvi dall' impedimento dell' aria, e del filo. Dal che possiamo veracemente concludere, che l' impeto acquistato nel punto B dalla palla nello scendere per l' arco C B, fu tanto, che bastò a risospingersi per un simile arco B D alla medesima altezza; fatta, e più volte reiterata cotale esperienza, voglio, che ficchiamo nella parete rasente al perpendicolo A B un chiodo, come in E, ovvero in F, che sporga in fuori cinque, o sei dita; e questo acciocchè il filo A C tornando come prima a riportar la palla C per l' arco C B, giunta che ella sia in B, intoppando il filo nel chiodo E, sia costretta a camminare per la circonferenza B G descritta intorno al centro E, dal che vedremo quello, che potrà far quel medesimo impeto, che dianzi concepito nel medesimo termine B, sospinse l' istesso mobile per l' arco E D all' altezza dell' orizzontale C D. Ora, Signori, voi vedrete con gusto condursi la palla all' orizzontale

nel punto G, e l'istesso accadere, se l'intoppo si mettesse più basso, come in F, dove la palla descriverebbe l'arco B I, terminando sempre la sua salita precisamente nella linea C D, e quando l'intoppo del chiodo fusse tanto basso, che l'avanzo del filo sotto di lui non arrivasse all'altezza di C D, ( il che accaderebbe, quando fusse più vicino al punto B, che al segamento dell' A B coll'orizzontale C D,) allora il filo cavalcherebbe il chiodo, e se gli avvolgerebbe intorno. Questa esperienza non lascia luogo di dubitare della verità del supposto: imperocchè essendo li due archi C B, D B eguali, e similmente posti, l'acquisto di momento fatto per la scesa nell'arco C B, è il medesimo, che il fatto per la scesa dell'arco D B; ma il momento acquistato in B per l'arco C B è potente a risospingere in su il medesimo mobile per l'arco B D; adunque anco il momento acquistato nella scesa D B è eguale a quello, che sospigne l'istesso mobile pel medesimo arco da B in D, sicchè universalmente ogni momento acquistato per la scesa d'un arco è eguale a quello, che può far risalire l'istesso mobile pel medesimo arco: ma i momenti tutti, che fanno risalire per tutti gli archi B D, B G, B I sono eguali, poichè son fatti dall'istesso medesimo momento acquistato per la scesa C B, come mostra l'esperienza: adunque tutti i momenti, che si acquista-

no per le scese negli archi D B, G B, I B sono eguali.

*Sagr.* Il discorso mi par concludentissimo, e l'esperienza tanto accomodata per verificare il postulato, che molto ben sia degno d'esser conceduto, come se fusse dimostrato.

*Salv.* Io non voglio, Sig. Sagredo, che noi ci pigliamo più del dovere, e massimamente che di questo assunto ci abbiamo a servire principalmente nei moti fatti sopra superficie rette, e non sopra curve, nelle quali l'accelerazione procede con gradi molto differenti da quelli, con i quali noi pigliamo, ch'ella proceda nei piani retti. Di modo che sebben l'esperienza addotta ci mostra, che la scesa per l'arco C B conferisce al mobile momento tale, che può ricondurlo alla medesima altezza per qualsivoglia arco B D, B G, B I, noi non possiamo con simile evidenza mostrare, che l'istesso accadesse, quando una perfettissima palla dovesse scendere per piani retti inclinati secondo le inclinazioni delle corde di questi medesimi archi, anzi è credibile, che formandosi angoli da essi piani retti nel termine B, la palla scesa per l'inclinato secondo la corda C B trovando intoppo nei piani ascendenti, secondo le corde B D, B G, B I nell'urtare in essi perderebbe del suo impeto, nè potrebbe salendo condursi all'altezza della linea C D. Ma levato l'intoppo, che pre-

giudica all'esperienza, mi par bene, che l'intelletto resti capace, che l'impeto (che in effetto piglia vigore dalla quantità della scesa) sarebbe potente a ricondurre il mobile alla medesima altezza. Prendiamo dunque per ora questo, come postulato, la verità assoluta del quale ci verrà poi stabilita dal vedere altre conclusioni fabbricate sopra tale ipotesi rispondere, e puntualmente confrontarsi colla esperienza. Supposto dall' Autore questo solo principio, passa alle proposizioni dimostrativamente concludendole, delle quali la prima è questa.

## THEOR. I. PROP. I.

*Tempus, in quo aliquod spatium a mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, est aequale tempori, in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu aequabili delato, cujus velocitatis gradus subduplus sit ad summum et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.*

Repraesentetur per extensionem A B (Fig. XLV) tempus, in quo a mobili latione uniformiter accelerata ex quiete in C conficitur spatium C D; graduum autem velocitatis adauctae in instantibus temporis A B maximus, et ultimus reprae-

sentetur per E B, utcunque super A B constitutam: junctaeque A E linae omnes ex singulis punctis linae A B ipsi B E aequidistanter actae crescentes velocitatis gradus post instans A repraesentabunt. Divisa deinde B E bifariam in F, ductisque parallelis F G, A G, ipsis B A, B F, Parallelogrammum A G F B erit constitutum triangulo A E B aequale, dividens suo latere G F bifariam A E in I: quod si parallelae trianguli A E B usque ad G I F extendantur, habebimus aggregatum parallelarum ominum in quadrilatero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo A E B; quae enim sunt in triangulo I E F, paria sunt cum contentis in triangulo G I A; eae vero quae habentur in trapezio A I F B, communes sunt. Cumque singulis ex omnibus instantibus temporis A B respondeant singula, et omnia puncta lineae A B, ex quibus actae parallelae in triangulo A E B comprehensae crescentes gradus velocitatis adauctae repraesentant, parallelae vero intra parallelogrammum contentae totidem gradus velocitatis non adauctae, sed aequabilis itidem repraesentent: apparet totidem velocitatis momenta absumpta esse in motu accelerato juxta crescentes parallelas trianguli A E B, ac in motu aequabili juxta parallelas parallelogrammi G B: quod enim momentorum deficit in prima motus accelerati medietate, ( deficiunt enim momen-

ta per parallelas trianguli A G I repraesentata, ) reficitur a momentis per parallelas trianguli I E F repraesentatis. Patet igitur, aequalia futura esse spatia tempore eodem a duobus mobilibus peracta, quorum unum motu ex quiete uniformiter accelerato moveatur, alterum vero motu aequabili juxta momentum subduplum momenti maximi velocitatis accelerati motus, quod erat intentum.

## THEOR. II. PROP. II.

*Si aliquod Mobile motu uniformiter accelerato descendat ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso peracta sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum: nempe ut eorundem temporum quadrata.*

Intelligatur fluxus temporis ex aliquo primo instanti A repraesentari per extensionem A B ( Fig. XLVII. ) in qua sumantur duo quaelibet tempora A D, A E; sitque H I linea, in qua mobile ex puncto H, tanquam primo motus principio, descendat uniformiter acceleratum; sitque spatium H L peractum primo tempore A D, H M vero sit spatium per quod descenderit in tempore A E. Dico spatium M H ad spatium H L esse in duplicata ratione ejus, quam habet tempus E A ad tempus A D. Seu dicamus, spatia M H, H L, ean-

dem habere rationem quam habent quadrata E A, A D. Ponatur linea A C, quemcunque angulum cum ipsa A B continens; ex puuctis vero D, E ductae sint parallelae D O, E P, quarum D O repraesentabit maximum gradum velocitatis acquisitae in instanti D temporis A D; P E vero maximum gradum velocitatis acquisitae in instanti E temporis A E. Quia vero supra demonstratum est, quod attinet ad spatia peracta, aequalia esse inter se illa, quorum alterum conficitur a mobili ex quiete motu uniformiter accelerato; alterum vero, quod tempore eodem conficitur a mobili motu aequabili delato, cujus velocitas subdupla sit maximae in motu accelerato acquisitae; constat, spatia M H, L H, esse eadem, quae motibus aequalibus, quorum velocitates essent ut dimidiae P E, O D, conficerentur in temporibus E A, D A. Si igitur ostensum fuerit, haec spatia M H, L H, esse in duplicata ratione temporum E A, D A; intentum probatum erit. Verum in quarta propositione primi libri demonstratum est, mobilium aequabili motu latorum spatia peracta habere inter se rationem compositam ex ratione velocitatum, et ex ratione temporum: hic autem ratio velocitatum est eadem cum ratione temporum, ( quam enim rationem habet dimidia P E ad dimidiam O D, seu tota P E ad totam O D, hanc habet A E ad A D, ) ergo ratio spatiorum peracto-

rum dupla est rationis temporum, quod erat demonstrandum.

Patet etiam hinc, eandem spatiorum rationem esse duplam rationis maximorum graduum velocitatis: nempe linearum P E, O D, cum sit P E ad O D, ut E A ad D A.

COROLLARIUM I.

*Hinc manifestum est, quod si fuerint quotcunque tempora aequalia consequenter sumpta a primo instanti seu principio lationis, ut puta* A D, D E, E F, F G, *quibus conficiantur spatia* H L, L M, M N, N I, *ipsa spatia erunt inter se, ut numeri impares ab unitate, scilicet ut* 1; 3, 5, 7. *Haec enim est ratio excessuum quadratorum linearum sese aequaliter excedentium, et quarum excessus est aequalis minimae ipsarum: seu dicamus quadratorum sese ab unitate consequentium. Dum igitur gradus velocitatis augentur juxta seriem simplicem numerorum in temporibus aequalibus, spatia peracta iisdem tempobus incrementa suscipiunt juxta seriem numerorum imparium ab unitate.*

*Sagr.* Sospendete in grazia alquanto la lettura, mentre io vo ghiribizzando intorno a certo concetto pur ora cascatomi in mente, per la spiegazione del quale per mia, e per vostra più chiara intelligenza fo un poco di disegno, dove mi figuro per la linea A I (Fig. XLVIII.) la conti-

nuazione del tempo dopo il primo instante in A, applicando poi in A secondo qualsivoglia angolo la retta A F, e congiugnendo i termini I, F, diviso il tempo A I in mezzo in C, tiro la C B paralella alla I F. Considerando poi la C B, come grado massimo della velocità, che cominciando dalla quiete nel primo instante del tempo A, si andò augumentando secondo il crescimento delle paralelle alla B C, prodotte nel triangolo A B C, (che è il medesimo, che crescere secondo che cresce il tempo,) ammetto senza controversia per i discorsi fatti fin qui, che lo spazio passato dal mobile cadente colla velocità accresciuta nel detto modo sarebbe eguale allo spazio, che passerebbe il medesimo mobile, quando si fosse nel medesimo tempo A C mosso di moto uniforme, il cui grado di velocità fosse eguale all' E C metà del B C. Passo ora più oltre, e figuratomi il mobile sceso con moto accelerato trovarsi nell'istante C, avere il grado di velocità B C, è manifesto, che se egli continuasse di muoversi coll'istesso grado di velocità B C senza più accelerarsi, passerebbe nel seguente tempo C I, spazio doppio di quello, che si passò nell'egual tempo A C, col grado di velocità uniforme E C metà del grado B C. Ma perchè il mobile scende con velocità accresciuta sempre uniformemente in tutti i tempi eguali, aggiugnerà al grado C B nel seguente tempo C I quei momenti me-

desimi di velocità crescente secondo le parallele del triangolo B F G eguale al triangolo A B C. Sicchè aggiunto al grado di velocità G I la metà del grado F G, massimo degli acquistati nel moto accelerato, e regolati dalle parallele del triangolo B F G, avremo il grado di velocità I N, col quale di moto uniforme si sarebbe mosso nel tempo C I; il qual grado I N essendo triplo del grado E C convince lo spazio passato nel secondo tempo C I, dovere esser triplo del passato nel primo tempo C A. E se noi intenderemo essere aggiunta all' A I un' altra egual parte di tempo I O, ed accresciuto il triangolo sino in A P O, è manifesto, che quando si continuasse il moto per tutto il tempo I O col grado di velocità I F, acquistato nel moto accelerato nel tempo A I, essendo tal grado I F quadruplo dell' E C, lo spazio passato nel tempo I O sarebbe quadruplo del passato nell' egual primo tempo A C, ma continuando l' accrescimento dell' uniforme accelerazione nel triangolo F P Q, simile a quello del triangolo A B C, che ridotto a moto equabile aggiugne il grado eguale all' E C, aggiunto il Q R eguale all' E C, avremo tutta la velocità equabile esercitata nel tempo I O quintupla dell' equabile del primo tempo A C, e però lo spazio passato quintuplo del passato nel primo tempo A C. Vedesi dunque anco in questo semplice

calcolo gli spazj passati in tempi eguali dal mobile, che partendosi dalla quiete va acquistando velocità, conforme all' accrescimento del tempo, esser tra di loro come i numeri impari *ab unitate* 1 3 5 e congiuntamente presi gli spazj passati, il passato nel doppio tempo esser quadruplo del passato nel sudduplo, il passato nel tempo triplo esser nonuplo, ed in somma gli spazj passati essere in duplicata proporzione dei tempi, cioè come i quadrati di essi tempi.

*Simpl.* Io veramente ho preso più gusto in questo semplice e chiaro discorso del Sig. Sagr. che nella per me più oscura dimostrazione dell' Autore: sicchè io resto assai ben capace, che il negozio debba succeder così, posta, e ricevuta la definizione del moto uniformemente accelerato. Ma se tale sia poi l' accelerazione, della quale si serve la natura nel moto de' suoi gravi discendenti, io per ancora ne resto dubbioso, e però per intelligenza mia, e di altri simili a me, parmi che sarebbe stato opportuno in questo luogo arrecar qualche esperienza di quelle, che si è detto esservene molte, che in diversi casi s' accordano colle conclusioni dimostrate.

*Salv.* Voi da vero scienziato fate una ben ragionevol domanda, e così si costuma e conviene nelle scienze, le quali alle conclusioni naturali applicano le dimostrazioni matematiche, come si vede nei Perspettivi, negli Astronomi, nei Meccanici,

nei Musici, ed altri, li quali con sensate esperienze confermano i principj loro, che sono i fondamenti di tutta la seguente struttura: e però non voglio, che ci paja superfluo, se con troppa lunghezza avremo discorso sopra questo primo e massimo fondamento, sopra il quale s' appoggia l'immensa macchina d' infinite conclusioni, delle quali solamente una piccola parte ne abbiamo in questo libro poste dall'Autore, il quale avrà fatto assai ad aprir l' ingresso, e la porta stata finor serrata agl'ingegni speculativi. Circa dunque all'esperienze non ha tralasciato l' Autor di farne, e per assicurarsi che l' accelerazione dei gravi naturalmente discendenti segua nella proporzione sopraddetta, molte volte mi son ritrovato io a farne la prova nel seguente modo, in sua compagnia.

In un regolo, o vogliam dir corrente di legno lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezzo braccio, e per l'altro 3 dita, si era in questa minor larghezza incavato un canaletto poco più largo di un dito. Tiratolo dirittissimo, e per averlo ben pulito, e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata, e lustrata al possibile, si faceva in esso scendere una palla di bronzo durissimo ben rotondata e pulita. Costituito che si era il detto regolo pendente, elevando sopra il piano orizzontale una delle sue estremità, un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come

dico) scendere per lo detto canale la palla, notando nel modo, che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto: replicando il medesimo atto molte volte, per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza, nè anco della decima parte di una battuta di polso. Fatta, e stabilita precisamente tale operazione, facemmo scender la medesima palla solamente per la quarta parte della lunghezza di esso canale: e misurato il tempo della sua scesa, si trovava sempre puntualissimamente esser la metà dell'altro. E facendo poi l'esperienze di altre parti, esaminando ora il tempo di tutta la lunghezza col tempo della metà, e con quello delli $\frac{2}{3}$ o dei $\frac{3}{4}$ o in conclusione con qualunque altra divisione, per esperienze ben cento volte replicate sempre s'incontrava gli spazj passati esser tra di loro come i quadrati dei tempi: e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale, nel quale si faceva scender la palla. Dove osservammo ancora i tempi delle scese per diverse inclinazioni mantenere esquisitamente tra di loro quella proporzione, che più a basso troveremo essergli assegnata e dimostrata dall' Autore. Quanto poi alla misura del tempo, si teneva una gran secchia piena di acqua attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino saldatogli nel fondo,

versava un sottil filo di acqua, che si andava ricevendo con un picciol bicchiere per tutto il tempo, che la palla scendeva nel canale, e nelle sue parti: le particelle poi dell'acqua in tal guisa raccolte si andavano di volta in volta con esattissima bilancia pesando; dandoci le differenze, e proporzioni dei pesi loro le differenze, e proporzioni dei tempi: e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni molte e molte volte replicate giammai non differivano di un notabil momento.

*Simp.* Gran soddisfazione avrei ricevuta nel trovarmi presente a tali esperienze, ma sendo certo della vostra diligenza nel farle, e fedeltà nel riferirle, mi quieto, e le ammetto per sicurissime, e vere.

*Salv.* Potremo dunque ripigliar la nostra lettura, e seguitare avanti.

## COROLLARIUM II.

*Colligitur secundo, quod si a principio lationis sumantur duo spatia quaelibet, quibuslibet temporibus peracta, tempora ipsorum erunt inter se, ut alterum eorum ad spatium medium proportionale inter ipsa. Sumptis enim a principio lationis* S ( Fig. XLIX ) *duobus spatiis* S T, S V*; quorum medium sit proportionale* S

X; *tempus casus per* S T *ad tempus casus per* S V *erit*, *ut* S T *ad* S X: *seu dicamus*, *tempus per* S V *ad tempus per* S T *esse*, *ut* V S *ad* S X. *Cum enim demonstratum sit*, *spatia peracta esse in duplicata ratione temporum*, *seu* (*quod idem est*) *esse ut temporum quadrata*; *ratio autem spatii* V S *ad spatium* S T *sit dupla rationis* V S *ad* S X, *seu sit eadem*, *quam habent quadrata* V S, S X; *patet*, *rationem temporum lationum per* S V, S T *esse*, *ut spatiorum*, *seu linearum* V S, S X.

## SCHOLIUM.

Id autem, quod demonstratum est in lationibus peractis in perpendiculis, intelligatur etiam itidem contingere in planis utcunque inclinatis; in iisdem enim assumptum est accelerationis gradus eadem ratione augeri, nempe secundum temporis incrementum, seu dicas secundum simplicem, ac primam numerorum seriem.

*Salv*. Qui vorrei, Sig. Sagredo, che a me ancora fosse permesso, sebben forse con troppo tedio del Sig. Simplicio, il differir per un poco la presente lettura, fin ch' io possa esplicare quanto dal detto è dimostrato fin' ora, e congiuntamente dalla notizia di alcune conclusioni meccaniche appresc già dal nostro Accademico, sov-

viemmi adesso di poter soggiugnere per maggior confermazione della verità del principio, che sopra con probabili discorsi ed esperienze fu da noi esaminato; anzi quello più importa per geometricamente concluderlo, dimostrando prima un sol Lemma elementare nella contemplazione degl' impeti.

*Sagr.* Mentre tale debba esser l'acquisto, quale V. S. ci promette, non vi è tempo, che da me volentierissimo non si spendesse, trattandosi di confermare, e interamente stabilire queste scienze del moto: e quanto a me non solo vi concedo il poter soddisfarvi in questo particolare, ma di più pregovi ad appagare quanto prima la curiosità, che mi avete in esso svegliata; e credo che il Signor Simplicio abbia ancora il medesimo sentimento.

*Simp.* Non posso dire altrimenti.

*Salv.* Giacchè dunque me ne date licenza, considerisi in primo luogo come effetto notissimo, che i momenti, o le velocità di un istesso mobile son diverse sopra diverse inclinazioni di piani, e che la massima è per la linea perpendicolarmente sopra l'orizzonte elevata, e che per l'altre inclinate si diminuisce tal velocità, secondo che quelle più dal perpendicolo si discostano, cioè più obbliquamente s'inclinano, onde l'impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del di-

scendere vien diminuito nel mobile dal piano soggetto, sopra il quale esso mobile s'appoggia, e discende.

E per meglio dichiararmi, intendasi la linea A B, (Fig. L.) perpendicolarmente eretta sopra l'orizzonte A C, pongasi poi la medesima in diverse inclinazioni verso l'orizzonte piegata, come in A D, A E, A F, ec. dico l'impeto massimo e totale del grave per discendere esser per la perpendicolare B A, minor di questo per la D A, e minore ancora per la E A, e successivamente andarsi diminuendo per la più inclinata F A, e finalmente esser del tutto estinto nella orizzontale C A, dove il mobile si trova indifferente al moto e alla quiete, e non ha per se stesso inclinazione di muoversi verso alcuna parte, nè meno alcuna resistenza all'esser mosso; poichè siccome è impossibile, che un grave o un composto di essi si muova naturalmente all'in su discostandosi dal comun centro, verso dove conspirano tutte le cose gravi, così è impossibile, che egli spontaneamente si muova, se con tal moto il suo proprio centro di gravità non acquista avvicinamento al suddetto centro comune: onde sopra l'orizzontale, che qui s'intende per una superficie egualmente lontana dal medesimo centro, e perciò affatto priva d'inclinazione, nullo sarà l'impeto o momento di detto mobile. Appresa questa mutazione

d' impeto, mi fa qui mestier esplicare quello, che in un antico trattato di meccaniche scritto già in Padova dal nostro Accademico sol per uso de' suoi Discepoli fu diffusamente e concludentemente dimostrato, in occasione di considerare l' origine e natura del maraviglioso strumento della vite, ed è, con qual proporzione si faccia tal mutazione d' impeto, per diverse inclinazioni de' piani, come per esempio, del piano inclinato A F, tirando la sua elevazione sopra l' orizzonte, cioè la linea F C, per la quale l' impeto di un grave, ed il momento del discendere è il massimo, cercasi qual proporzione abbia questo momento al momento dell' istesso mobile per l' inclinata F A. Qual proporzione dico esser reciproca delle dette lunghezze, e questo sia il Lemma da premettersi al Teorema, che dopo io spero di poter dimostrare. Qui è manifesto tanto esser l' impeto del discendere di un grave, quanta è la resistenza, o forza minima, che basta per proibirlo, e fermarlo: per tal forza, e resistenza, e sua misura, mi voglio servire della gravità di un altro mobile. Intendasi ora sopra il piano F A posare il mobile G legato con un filo, che cavalcando sopra l' F abbia attaccato un peso H, e consideriamo, che lo spazio della scesa, o salita a perpendicolo di esso, è ben sempre eguale a tutta la salita, o scesa dell' altro mobile G per l' inclinata

A F, ma non già alla salita, o scesa a perpendicolo, nella qual sola esso mobile G (siccome ogni altro mobile) esercita la sua resistenza, il che è manifesto; imperocchè considerando nel triangolo A F C il moto del mobile G, per esempio all' in su da A in F, esser composto del trasversale orizzontale A C, e del perpendicolare C F, ed essendo che quanto all' orizzontale nessuna, come si è detto, è la resistenza del medesimo all' esser mosso (non facendo con tal moto perdita alcuna, nè meno acquisto in riguardo della propria distanza dal comun centro delle cose gravi, che nell' orizzonte si conserva sempre l' istessa) resta la resistenza esser solamente rispetto al dover salire la perpendicolare C F. Mentre che dunque il grave G movendosi da A in F resiste solo nel salire lo spazio perpendicolare C F, ma che l'altro grave H scende a perpendicolo necessariamente, quanto tutto lo spazio F A, e che tal proporzione di salita, e scesa si mantiene sempre l' istessa, poco o molto che sia il moto dei detti mobili (per esser collegati insieme) possiamo assertivamente affermare, che quando debba seguire l' equilibrio, cioè la quiete tra essi mobili, i momenti, le velocità, o le lor propensioni al moto, cioè gli spazj, che da loro si passerebbero nel medesimo tempo, devon rispondere reciprocamente alle loro gravità, secondo quello, che in tutti

i casi de' movimenti meccanici si dimostra, sicchè basterà per impedire la scesa del G, che lo H sia tanto men grave di quello, quanto a proporzione lo spazio C F è minore dello spazio F A.. Sia fatto dunque come F A ad F C, così il grave G al grave H, che allora seguirà l'equilibrio, cioè i gravi H, G averanno momenti eguali, e cesserà il moto dei detti mobili. E perchè siamo convenuti, che di un mobile tanto sia l'impeto, l'energia, il momento, o la propensione al moto, quanta è la forza, o resistenza minima, che basta a fermarlo, e s'è concluso, che il grave H è bastante a proibire il moto al grave G; adunque il minor peso H, che nella perpendicolare F C esercita il suo momento totale, sarà la precisa misura del momento parziale, che il maggior peso G esercita per lo piano inclinato F A; ma la misura del total momento del medesimo grave G è egli stesso, (poichè per impedire la scesa perpendicolare di un grave si richiede il contrasto di altrettanto grave, che pur sia in libertà di moversi perpendicolarmente); adunque l'impeto, o momento parziale del G per l'inclinata F A all'impeto massimo, e totale dell'istesso G per la perpendicolare F C starà, come il peso H al peso G, cioè per la costruzione come essa perpendicolare F C, elevazione dell' inclinata, alla medesima inclinata F A, che è quello, che per Lemma si pro-

pose di dimostrare, che dal nostro Autore, come vedranno, vien supposto per noto nella seconda parte della sesta proposizione del presente trattato.

*Sagr.* Da questo, che V. S. ha concluso fin qui, parmi che facilmente si possa dedurre, argomentando *ex aequali* colla proporzione perturbata, che i momenti dell'istesso mobile, per piani diversamente inclinati come F A, F I, che abbiano l' istessa elevazione, son fra loro in reciproca proporzione de'medesimi piani.

*Salv.* Verissima conclusione. Fermato questo, passerò adesso a dimostrare il Teorema, cioè, che

I gradi di velocità di un mobile discendente con moto naturale dalla medesima sublimità per piani in qualsivoglia modo inclinati, all'arrivo all'orizzonte son sempre eguali, rimossi gli impedimenti.

Qui deesi prima avvertire, che stabilito, che in qualsivogliano inclinazioni il mobile dalla partita dalla quiete vada crescendo la velocità, o la quantità dell'impeto colla proporzione del tempo (secondo la definizione data dall' Autore al moto naturalmente accelerato) onde, come egli ha per l' antecedente proposizione dimostrato, gli spazj passati sono in duplicata proporzione dei tempi, e conseguentemente de' gradi di velocità; quali furono gl' impeti nella prima mossa, tali proporzionalmente saranno i gradi dalle velocità guadagnati nell' istesso

tempo, poichè e questi, e quelli crescono colla medesima proporzione nel medesimo tempo.

Ora sia il piano inclinato A B (Fig. LI.) la sua elevazione sopra l'orizzonte la perpendicolare A C, e l'orizzontale C B; e perchè, come poco fa si è concluso, l'impeto di un mobile per la perpendicolare A C all'impeto del medesimo per l'inclinata A B sta, come A B ad A C, prendasi nell'inclinata A B la A D terza proporzionale delle A B, A C; l'impeto dunque per A C all'impeto per la A B, cioè per la A D, sta come la A C all'A D, e perciò il mobile nell'istesso tempo, che passerebbe lo spazio perpendicolare A C, passerà ancora lo spazio A D nell'inclinata A B, (essendo i momenti come gli spazj) ed il grado di velocità in C al grado di velocità in D averà la medesima proporzione della A C alla A D; ma il grado di velocità in B al medesimo grado in D sta, come il tempo per A B al tempo per A D, per la definizione del moto accelerato, ed il tempo per A B al tempo per A D sta, come la medesima A C media tra le B A, A D, alla A D, per l'ultimo corollario della seconda proposizione, adunque i gradi in B, ed in C, al grado in D, hanno la medesima proporzione della A C alla A D, e però sono eguali, che è il Teorema, che intesi di dimostrare.

Di questo potremo più concludentemente provare la seguente terza proposizione dell'Autore, nella quale egli si vale del principio, ed è, che il tempo per l'inclinata al tempo per la perpendicolare, ha l'istessa proporzione di essa inclinata, e perpendicolare. Imperocchè diciamo, quando B A sia il tempo per A B, il tempo per A D sarà la media tra esse, cioè la A C, per lo secondo Corollario della seconda proposizione; ma quando A C sia il tempo per A D, sarà anco il tempo per A C, per essere le A D, A C scorse in tempi eguali, e però quando B A sia il tempo per A B, A C sarà il tempo per A C, adunque come A B ad A C, così il tempo per A B, al tempo per A C.

Col medesimo discorso si proverà, che il tempo per A C al tempo per altra inclinata A E sta, come la A C alla A E; adunque *ex aequali* il tempo per l'inclinata A B al tempo dell'inclinata A E sta omologamente, come la A B alla A E, ec.

Potevasi ancora dall'istesso progresso del Teorema, come vedrà benissimo il Signor Sagr. dimostrar immediatamente la sesta proposizione dell'Autore; ma basti per ora tal digressione, che forse gli è riuscita troppo tediosa, benchè veramente di profitto in queste materie del moto.

*Sagr.* Anzi di mio grandissimo gusto, e necessarissima alla perfetta intelligenza di quel principio.

*Salv.* Ripiglierò dunque la lettura del testo.

## THEOR. III. PROP. III.

*Si super plano inclinato, atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur ex quiete idem mobile, tempora lationum erunt inter se ut plani ipsius, et perpendiculi longitudines.*

Sit planum inclinatum A C (Fig. LII.) et perpendiculum A B, quorum eadem sit altitudo supra horizontem C B, nempe ipsamet linea B A: Dico, tempus descensus ejusdem mobilis super plano A C, ad tempus casus in perpendiculo A B, eam habere rationem, quam habet longitudo plani A C ad ipsius perpendiculi A B longitudinem. Intelligantur enim quotlibet lineae D G, E I, F L, horizonti C B parallelae: constat ex assumpto, gradus velocitatis mobilis ex A primo motus initio in punctis G D acquisitos esse aequales, cum accessus ad horizontem æquales sint: similiter gradus in punctis I, E iidem erunt: nec non gradus in L, et F. Quod si non hae tantum parallelae, sed ex punctis omnibus lineae A B usque ad lineam A C protractae intelligantur; momenta, seu gradus velocitatum in terminis singularum parallelarum semper erunt inter se paria. Conficiantur itaque spatia duo A C, A B iisdem gradibus velocitatis. Sed de-

monstratum est, quod si duo spatia conficiantur a mobili, quod iisdem velocitatis gradibus feratur, quam rationem habent ipsa spatia, eandem habent tempora lationum, ergo tempus lationis per A C ad tempus per A B est, ut longitudo plani A C ad longitudinem perpendiculi A B. Quod erat demostrandum.

*Sagr.* Parmi, che assai chiaramente e con brevità si poteva concludere il medesimo, essendosi già concluso, che la somma del moto accelerato dei passaggi per A C, A B è quanto il moto equabile, il cui grado di velocità sia sudduplo al grado massimo C B; essendo dunque passati li due spazj A C, A B coll'istesso moto equabile, già è manifesto per la proposizione prima del primo, che i tempi de' passaggi saranno come gli spazj medesimi.

## COROLLARIUM.

*Hinc colligitur, tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se, ut eorum longitudines. Si enim intelligatur aliud planum* A M *ex* A *ad eundem horizontem* C B *terminatum, demonstrabitur pariter, tempus descensus per* A M *ad tempus per* A B *esse, ut linea* A M *ad* A B; *ut autem tempus* A B *ad tempus per* A C, *ita linea* A B *ad* A C:

*ergo ex aequali, ut A M ad A C, ita tempus per A M ad tempus per A C.*

## THEOR. IV. PROP. IV.

*Tempora lationum super planis aequalibus, sed inaequaliter inclinatis sunt inter se in subdupla ratione elevationum eorundem planorum permutatim accepta.*

Sint ex eodem termino B (Fig. LIII.) plana aequalia, sed inaequaliter inclinata, B A, B C, et ductis A E, C D, lineis horizontalibus ad perpendiculum usque B D: esto plani B A elevatio B E, plani vero B C elevatio sit B D, et ipsarum elevationum D B, B E media proportionalis sit B I; constat, rationem D B ad B I esse subduplam rationis D B ad B E. Dico jam, rationem temporum descensuum, seu lationum super planis B A, B C, esse eandem cum ratione D B ad B I permutatim assumpta: ut scilicet temporis per B A homologa sit elevatio alterius plani B C, nempe B D, temporis vero per B C homologa sit B I. Demonstrandum proinde est, tempus per B A ad tempus per B C esse, ut D B ad B I. Ducatur I S, ipsi D C aequidistans; et quia jam demonstratum est, tempus descensus per B A ad tempus casus per perpendiculum B E esse, ut ipsa B A ad B E: tempus vero per B E ad tempus per B D, ut B E ad B I, tempus vero per B D ad tempus per B C, ut B D ad B C, seu B I ad B S; ergo ex aequali tempus per B A ad tempus per B C erit,

ut B A ad B S, seu C B, ad B S, est autem C B ad B S, ut D B ad B I; ergo patet propositum.

## THEOR. V. PROP. V.

*Ratio temporum descensuum super planis, quorum diversae sint inclinationes, et longitudines, nec non elevationes inaequales, componitur ex ratione longitudinum ipsorum planorum, et ex ratione subdupla elevationum eorundem permutatim accepta.*

Sint plana A B, A C (Fig. LIV.) diversimode inclinata, quorum longitudines sint inaequales et inaequales quoque elevationes. Dico, rationem temporis descensus per A C ad tempus per A B compositam esse ex ratione ipsius A C ad A B, et ex subdupla elevationum earundem permutatim accepta. Ducatur enim perpendiculum A D, cui occurrant horizontales B G, C D, et inter elevationes D A, A G media sit A L; ex puncto vero L ducta parallela horizonti occurrat plano A C in F, erit quoque A F media inter C A, A E. Et quia tempus per A C ad tempus per A E est, ut linea F A ad A E, tempus vero per A E ad tempus per A B, ut eadem A E ad eandem A B: patet, tempus per A C ad tempus per A B esse, ut A F ad A B. Demonstrandum itaque restat, rationem A F ad A B componi ex ratione

C A ad A B, et ex ratione G A ad A L, quae est ratio subdupla elevationum D A, A G permutatim accepta. Id autem manifestum fit, posita C A inter F A, A B: ratio enim F A ad A C est eadem cum ratione L A ad A D, seu G A ad A L; quae est subdupla rationis elevationum G A, A D, et ratio C A ad A B est ipsamet ratio longitudinum; ergo patet propositum.

## THEOR. VI. PROP. VI.

*Si a puncto sublimi, vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia.*

Sit circulus ad horizontem G H (Fig. LV.) erectus, cujus ex imo puncto, nempe ex contactu cum horizontali sit erecta diameter F A, et ex puncto sublimi A plana quaelibet inclinentur usque ad circumferentiam A B, A C. Dico tempora descensuum per ipsa esse aequalia. Ducantur B D, C E ad diametrum perpendiculares, et inter planorum E A, A D altitudines media sit proportionalis A I. Et quia rectangula F A E, F A D aequalia sunt quadratis A C, A B; ut autem rectangulum F A E ad rectangulum F A D, ita E A ad A D; ergo ut quadratum C A

ad quadratum A B, ita E A linea ad lineam A D. Verum ut linea E A ad D A, ita quadratum I A ad quadratum A D; ergo quadrata linearum C A, A B sunt inter se, ut quadrata linearum I A, A D, et ideo ut C A linea ad A B. ita I A ad A D. At in praecedenti demonstratum est, rationem temporis descensus per A C, ad tempus descensus per A B, componi ex rationibus C A ad A B et D A ad A I, quae est eadem cum ratione B A ad A C; ergo ratio temporis descensus per A C ad tempus descensus per A B componitur ex rationibus C A ad A B, et B A ad A C. Est igitur ratio eorundem temporum ratio aequalitatis, ergo patet propositum.

Idem aliter demonstratur ex Mechanicis, nempe in sequenti figura mobile temporibus aequalibus pertransire C A, D A (Fig. LVI.) Sit enim B A aequalis ipsi DA. et ducantur perpendiculares B E, D F, constat ex elementis mechanicis momentum ponderis super plano secundum lineam A B C elevato ad momentum suum totale esse, ut B E ad B A, ejusdemque ponderis momentum super elevatione A D ad totale suum momentum esse, ut D F ad D A, vel B A: ergo ejusdem ponderis momentum super plano secundum D A inclinato ad momentum super inclinatione secundum A B C est, ut linea D F ad lineam B E. Quare spatia, quae pertransibit idem pondus temporibus aequali-

bus super inclinationibus C A, D A, erunt inter se, ut lineae B E, D F, ex propositione secunda primi libri. Verum ut B E ad D F, ita demonstratur se habere A C ad D A; ergo idem mobile temporibus aequalibus pertransit lineas C A, D A

Esse autem ut B E ad D F, ita C A ad D A, ita demonstratur:

Jungatur C D, et per D, et B ipsi A F parallelae agantur D G L, secans C A in puncto I, et B H: eritque angulus A D I aequalis angulo D C A, cum circumferentiis L A, A D æqualibus insistant, estque angulus D A C communis: erg triangulorum æquiangulorum C A D, D A I latera circa æquales angulos proportionalia erunt, et ut C A ad A D, ita D A ad A I, id est B A ad A I, seu H A ad A G, hoc est B E ad D F: quod erat probandum.

Aliter idem magis expedite demonstrabitur sic.

Sit ad horizontem A B (Fig. LVII.) erectus circulus, cujus diameter C D ad horizontem sit perpendicularis; ex termino autem sublimi D inclinetur ad circumferentiam usque quodlibet planum D F. Dico descensum per planum D F, et casum per diametrum D C ejusdem mobilis temporibus æqualibus absolvi. Ducatur enim F G horizonti A B parallela, quæ erit ad diametrum D C perpendicularis,

et connectatur F C; et quia tempus casus per D C ad tempus casus per D G est, ut media proportionalis inter C D, D G ad ipsam D G: media autem inter C D, D G est D F, cum angulus D F C in semicirculo sit rectus, et F G perpendicularis ad D C: tempus itaque casus per D C ad tempus casus per D G est ut linea F D ad D G. Sed jam demonstratum est, tempus descensus per D F ad tempus casus per D G esse, ut eadem linea D F ad D G; tempora igitur descensus per D F, et casus per D C ad idem tempus casus per D G eandem habent rationem, ergo sunt æqualia. Similiter demonstrabitur, si ab imo termino C elevetur chorda C E ducta E H horizonti parallela, et juncta E D, tempus descensus per E C, æquari tempori casus per diametrum D C.

## COROLLARIUM I.

*Hinc colligitur, tempora descensuum per chordas omnes ex terminis C, seu D perductas esse inter se aequalia.*

## COROLLARIUM II.

*Colligitur etiam, quod si ab eodem puncto descendant perpendiculum et planum inclinatum, super quae descensus*

*fiant temporibus aequalibus, eadem esse in semicirculo, cujus diameter est perpendiculum ipsum.*

## COROLLARIUM III.

*Hinc colligitur lationum tempora super planis inclinatis tunc esse aequalia, quando elevationes partium aequalium eorundem planorum fuerint inter se, ut eorundem planorum longitudines: ostensum enim est, tempora per* C A, D A *in penultima figura esse aequalia, dum elevatio partis* A B *aequalis* A D, *nempe* B E, *ad elevationem* D F *fuerit, ut* C A *ad* D A.

*Sagr.* Sospenda in grazia V. S. per un poco la lettura delle cose, che seguono, sin che io mi vo risolvendo sopra certa contemplazione, che pur ora mi si rivolge per la mente, la quale, quando non sia una fallacia, non è lontana dall' essere uno scherzo grazioso, quali son tutti quelli della natura, o della necessità.

È manifesto, che se da un punto segnato in un piano orizzontale si faranno produr sopra il medesimo piano infinite linee rette per tutti i versi, sopra ciascuna delle quali s' intenda muoversi un punto con moto equabile, cominciandosi a muover tutti nell' istesso momento di tempo dal segnato punto, e che sieno le ve-

locità di tutti eguali, si verranno conseguentemente a figurar da essi punti mobili circonferenze di cerchi tuttavia maggiori e maggiori, concentrici tutti intorno al primo punto segnato, giusto in quella maniera, che vediamo farsi dall' ondette dell' acqua stagnante, dopo che da alto vi sia caduto un sassetto, la percossa del quale serve per dar principio di moto verso tutte le parti, e resta come centro di tutti i cerchi, che vengon disegnati successivamente maggiori e maggiori da esse ondette. Ma se noi intenderemo un piano eretto all' Orizzonte, ed in esso piano notato un punto sublime, dal quale si partano infinite linee inclinate secondo tutte le inclinazioni, sopra le quali ci figuriamo discender mobili gravi, ciascheduno con moto naturalmente accelerato con quelle velocità, che alle diverse inclinazioni convengono; posto che tali mobili discendenti fusser continuamente visibili, in che sorte di linee gli vedremo noi continuamente disposti? Qui nasce la mia maraviglia, mentre le precedenti dimostrazioni mi assicurano, che si vedranno sempre tutti nell' istessa circonferenza di cerchi successivamente crescenti, secondo che i mobili nello scendere si vanno più e più successivamente allontanando dal punto sublime, dove fu il principio della lor caduta, e per meglio dichiararmi segnisi il punto sublime A, (LVIII.) dal quale discendano

superficie sole orizzontale ed eretta, ma per tutti i versi, siccome da quelle, cominciandosi da un sol punto, si passava alla produzione di cerchi dal minimo al massimo, così cominciandosi da un sol punto si verranno producendo infinite sfere, o vogliam dire una sfera, che in infinite grandezze si andrà ampliando. E questo in due maniere: cioè, o col por l'origine nel centro, ovvero nella circonferenza di tali sfere.

*Salv.* La contemplazione è veramente bellissima, e proporzionata all'ingegno del Sig. Sagr.

*Simp.* Io restando almeno capace della contemplazione sopra le due maniere del prodursi colli due diversi moti naturali i cerchi e le sfere, sebbene della produzione dipendente dal moto accelerato, e della sua dimostrazione non son del tutto intelligente, tuttavia quel potersi assegnare per luogo di tale emanazione tanto il centro infimo, quanto l'altissima sferica superficie, mi fa credere, che possa essere, che qualche gran mistero si contenga in queste vere ed ammirande conclusioni; mistero dico attenente alla creazione dell'universo, il quale si stima essere di forma sferica, ed alla residenza della prima causa.

*Salv.* Io non ho repugnanza al creder l'istesso, ma simili profonde contemplazioni si aspettano a più alte dottrine,

che le nostre. Ed a noi dee bastare d'esser quei men degni artefici, che dalle fodine scoprono e cavano i marmi, nei quali poi gli scultori industri fanno apparire maravigliose immagini, che sotto rozza ed informe scorza stavano ascose. Or se così vi piace, seguiremo avanti.

## THEOR. VII. PROP. VII.

*Si elevationes duorum planorum duplam habuerint rationem ejus, quam habeant eorundem planorum longitudines, lationes ex quiete in ipsis, temporibus aequalibus absolventur.*

Si plana inæqualia, et inæqualiter inclinata A E, A B, (Fig. LIX.) quorum elevationes sint F A, D A, et quam rationem habet A E ad A B, eandem duplicatam habeat F A ad D A. Dico tempora lationum super planis A E, A B ex quiete in A esse æqualia. Ductæ sint parallelæ horizontales ad lineam elevationum E F, et B D, quæ secet A E in G. Et quia ratio F A ad A D dupla est rationis E A ad A B, et ut F A ad A D, ita E A ad A G; ergo ratio E A ad A G dupla est rationis E A ad A B; ergo A B media est inter E A, A G, et quia tempus descensus per A B ad tempus per A G est, ut A B ad A G, tempus autem descensus per A G ad tempus per A E est, ut A G ad mediam inter A G, A E, quæ est A B; ergo ex æquali tem-

pus per A B ad tempus per A E est, ut A B ad se ipsam: sunt igitur tempora æqualia; quod erat demonstrandum.

## THEOR. VIII. PROP. VIII.

*In planis ab eodem sectis circulo ad horizontem erecto, in iis, quae cum termino diametri erecti conveniunt, sive imo, sive sublimi, lationum tempora sunt aequalia tempori casus in diametro: in illis vero, quae ad diametrum non pertingunt, tempora sunt breviora: in eis tandem, quae diametrum secant, sunt longiora.*

Circuli ad horizontem erecti esto diameter perpendicularis A B. (Fig. LX.) De planis ex terminis A, B ad circumferentiam usque productis, quod tempora lationum super eis sint æqualia, jam demonstratum est. De plano D F ad diametrum non pertingente, quod tempus descensus in eo sit brevius, demonstratur ducto plano D B, quod et longius erit, et minus declive, quam D F; ergo tempus per D F brevius, quam per D B, hoc est per A B. De plano vero diametrum secante, ut C O; quod tempus descensus in eo sit longius, itidem constat; est enim et longius, et minus declive, quam C B; ergo patet propositum.

## THEOR. IX. PROP. IX.

*Si a puncto in linea horizonti parallela duo plana utcunque inclinentur, et a linea secentur, quae cum ipsis angulos faciat permutatim aequales angulis ab iisdem planis, et horizontali contentis, lationes in partibus a dicta linea sectis, temporibus aequalibus absolventur.*

Ex puncto C (Fig. LXI.) horizontalis lineæ X, duo plana utcunque inflectantur C D, C B, et in quolibet puncto lineæ C D constituatur angulus C D F, angulo X C E æqualis: secet autem linea D F planum C E in F, adeo ut anguli C D F, C F D, angulis X C E, L C D permutatim sumptis sint æquales. Dico, tempora descensuum per C D, C F esse aequalia. Quod autem (posito angulo C D F æquali angulo X C E) angulus C F D sit æqualis angulo D C L, manifestum est. Dempto enim angulo communi D C F, ex tribus angulis trianguli C D F, æqualibus duobus rectis, quibus æquantur anguli omnes ad lineam L X in puncto C constitutis, remanent in triangulo duo C D F, C F D, duobus X C E, L C D æquales: positus autem est C D F ipsi X C E equalis: ergo reliquus C F D reliquo D C L. Ponatur planum C E aequale plano C D, et ex punctis D, E per-

pendiculares agantur D A, E B ad horizontalem X L, ex C vero ad D F ducatur perpendicularis C G. Et quia angulus C D G angulo E C B est aequalis, et recti sunt D G C, C B E, erunt trianguli C D G, C B E æquianguli, et ut D C ad C G, ita C E ad E B: est autem D C æqualis C E; ergo C G æqualis erit B E. Cumque triangulorum D A C, C G F, anguli D C A, C A D angulis G F C, C G F sint æquales: erit, ut C D ad D A, ita F C ad C G, et permutando, ut D C ad C F, ita D A ad C G, seu B E. Ratio itaque elevationum planorum æqualium C D, C E est eadem cum ratione longitudinum D C, C E: ergo ex corollario primo præcedentis Propositionis sextæ tempora descensuum in ipsis erunt aequalia, quod erat probandum.

Aliter idem; ducta F S ( Fig. LXII. ) perpendiculari ad horizontalem A S. Quia triangulum C S F simile est triangulo D G C, erit, ut S F ad F C, ita G C ad C D. Et quia triangulum C F G simile est triangulo D C A, erit, ut F C ad C G, ita C D ad D A: ergo ex aequali, ut S F ad C G, ita C G ad D A. Media est igitur C G inter S F, D A, et ut D A ad S F, ita quadratum D A ad quadratum C G Rursus cum triangulum A C D simile sit triangulo C G F, erit, ut D A ad D C, ita G C ad C F, et permutando ut D A ad C G, ita D C ad C F, et ut quadratum D A ad

quadratum C G, ita quadratum D C ad quadratum C F. Sed ostensum est, quadratum D A ad quadratum C G esse, ut linea D A ad lineam F S; ergo ut quadratum D C ad quadratum C F, ita linea D A ad F S; ergo ex præcedenti septima cum planorum C D, C F elevationes D A, F S, duplam habeant rationem eorundem planorum, tempora lationum per ipsa erunt æqualia.

## THEOR. X PROP. X.

*Tempora lationum super diversas planorum inclinationes, quarum elevationes sint aequales, sunt inter se, ut eorundem planorum longitudines, sive fiant lationes ex quiete, sive praecedat illis latio ex eadem altitudine.*

Fiant lationes per A B C ( Fig. LXIII.) et per A B D usque ad horizontem D C, adeo ut latio per A B praecedat lationibus per B D, et per B C. Dico, tempus lationis per B D ad tempus per B C esse, ut B D longitudo ad B C. Ducatur A F horizonti parallela, ad quam extendatur D B occurrens in F, et ipsarum D F, F B media sit F E, et ducta E O ipsi D C parallela, erit A O media inter C A, A B. Quod si intelligatur tempus per A B esse, ut A

B, erit tempus per F B, ut F B. Et tempus per totam A C erit ut media A O, per totam vero F D erit F E. Quare tempus per reliquam B C erit B O, per reliquam vero B D erit B E. Verum ut B E ad B O ita est B D ad B C; ergo tempora per B D, B C post casus per A B, F B, seu, quod idem est, per communem A B, erunt inter se, ut longitudines B D, B C; esse autem tempus per B D ad tempus per B C ex quiete in B, ut longitudo B D ad B C, supra demonstratum est. Sunt igitur tempora lationum per plana diversa, quorum aequales sint elevationes, inter se, ut eorundem planorum longitudines, sive motus fiat in ipsis ex quiete, sive lationibus iisdem praecedat alia latio ex eadem altitudine; quod erat ostendendum.

## THEOR. XI. PROP. XI.

*Si planum, in quo fit motus ex quiete, dividatur utcunque, tempus lationis per priorem partem ad tempus lationis per sequentem est, ut ipsamet prima pars ad excessum, quo eadem pars superatur a media proportionali inter totum planum, et primam eandem partem.*

Fiat latio per totam A B ( Fig. LXIV. ) ex quiete in A, quae in C divisa sit ut-

cunque; totius autem B A, et prioris partis A C media sit proportionalis A F: erit C F excessus mediae F A super partem A C: Dico tempus lationis per A C ad tempus sequentis lationis per C B, esse ut A C ad C F. Quod patet: nam tempus per A C ad tempus per totam A B est, ut A C ad mediam A F; ergo dividendo, tempus per A C ad tempus per reliquam C B erit, ut A C ad C F. Si itaque intelligatur tempus per A C esse ipsamet A C, tempus per C B erit C F: quod est propositum.

Quod si motus non fiat per continuatam A C B ( Fig. LXV. ) sed per inflexas A C D usque ad horizontem B D, cui ex F parallela ducta sit F E, demonstrabitur pariter tempus per A C ad tempus per reflexam C D esse ut A C ad C E. Nam tempus per A C ad tempus per C B est, ut A C ad C F, tempus vero per C B post A C ad tempus per C D post eundem descensum per A C demonstratum est esse, ut C B ad C D, hoc est ut C F ad C E; ergo ex aequali tempus per A C ad tempus per C D erit, ut A C linea ad C E.

## THEOR. XII. PROP. XII.

*Si perpendiculum, et planum utcunque inclinatum secentur inter easdem horizontales lineas, sumanturque media pro-*

*portionalia ipsorum, et partium suarum a communi sectione, et horizontali superiori comprehensarum; tempus lationis in perpendiculo ad tempus lationis factae in parte superiori perpendiculi, et consequenter in inferiori secantis plani, eam habebit rationem, quam habet tota perpendiculi longitudo ad lineam compositam ex media in perpendiculo sumpta, et ex excessu, quo totum planum inclinatum suam mediam superat.*

Sint horizontes superior A F ( Fig. LXVI. ), inferior C D, inter quos secentur perpendiculum A C, et planum inclinatum D F in B, et totius perpendiculi C A, et superioris partis A B media sit A R; totius vero D F, et superioris partis B F media sit F S. Dico, tempus casus per totum perpendiculum A C ad tempus per suam superiorem partem A B cum inferiori plano, nempe cum B D, eam habere rationem, quam habet A C ad mediam perpendiculi, scilicet A R, cum S D, quae est excessus totius plani D F super suam mediam F S. Connectatur R S, quae erit horizontalibus parallela. Et quia tempus casus per totam A C, ad tempus per partem A B est, ut C A ad mediam A R, si intelligamus A C esse tempus casus per A C; erit A R tempus casus per A B, et R C per reliquam B C. Quod si tempus per

A C ponatur, uti factum est, ipsa A C, tempus per F D, erit F D, et pariter concludetur D S esse tempus per B D post F B, seu post A B. Tempus igitur per totam A C, est A R cum R C; per inflexas vero A B D, erit A R cum S D: quod erat probandum.

Idem accidit si loco perpendiculi ponatur aliud planum, quale, v. gr. N O; eademque est demonstratio.

## PROBL. I. PROP. XIII.

*Dato perpendiculo, ad ipsum planum inflectere, in quo, cum ipsum habeat cum dato perpendiculo eandem elevationem, fiat motus post casum in perpendiculo eodem tempore, ac in eodem perpendiculo ex quiete.*

Sit datum perpendiculum A B ( Fig. LXVII. ), cui extenso in C ponatur pars B C aequalis, et ducantur horizontales C E, A G. Oportet ex B planum usque ad horizontem C E inflectere, in quo fiat motus post casum ex A eodem tempore, ac in A B ex quiete in A. Ponatur C D aequalis C B, et ducta B D applicetur B E aequalis utrisque B D, D C. Dico, B E esse planum quaesitum. Producatur E B occurrens horizonti A G in G, et ipsa-

rum E G, G B, media sit G F. Erit E F ad F B, ut E G ad G F, et quadratum E F ad quadratum F B, ut quadratum E G ad quadratum G F, hoc est, ut linea E G ad G B; est autem E G dupla G B; ergo quadratum E F duplum quadrati F B: verum quadratum quoque D B duplum est quadrati B C; ergo ut linea E F ad F B, ita D B ad B C, et componendo, et permutando, ut E B ad duas D B, B C, ita B F ad B C; sed B E duabus D B, B C est aequalis; ergo B F ipsi B C, seu B A aequalis est. Si igitur intelligatur A B esse tempus casus per A B, erit G B tempus per G B, et G F tempus per totam G E; ergo B F erit tempus per reliquam B E, post casum ex G, seu ex A. Quod erat propositum.

## PROBL. II. PROP. XIV.

*Dato perpendiculo, et plano ad eum inclinato, partem in perpendiculo superiori reperire, quae ex quiete conficiatur tempore aequali ei, quo conficitur planum inclinatum post casum in parte reperta in perpendiculo.*

Sit perpendiculum D B (Fig. LXVIII.) et planum ad ipsum inclinatum A C. Oportet in perpendiculo A D partem reperire, quae ex quiete conficiatur tempore

aequali ei, quo post casum in ea conficitur planum A C. Ducatur horizontalis C B, et ut B A cum dupla A C ad A C, ita fiat C A ad A E, et ut B A ad A C, ita fiat E A ad A R, et ab R ducatur perpendicularis R X ad D B; dico X esse punctum quæsitum. Et quia ut B A cum dupla A C ad A C, ita C A ad A E, dividendo erit, ut B A cum A C ad A C, ita C E ad E A, et quia ut B A ad A C, ita E A ad A R, erit componendo, ut B A cum A C ad A C, ita E R ad R A. Sed ut B A cum A C, ad A C, ita est C E ad E A; ergo ut C E ed E A, ita E R ad R A, et ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe C R ad R E. Sunt itaque C R, R E, R A proportionales. Amplius, quia ut B A ad A C, ita posita est E A ad A R, et propter similitudinem triangulorum ut B A ad A C, ita X A ad A R; ergo ut E A ad A R, ita X A ad A R: sunt itaque E A, X A aequales. Modo si intelligamus tempus per R A esse ut R A, tempus per R C erit R E, media inter C R, R A; et A E erit tempus per A C post R A, sive post X A; verum tempus per X A est X A, dum R A est tempus per R A. Ostensum autem est X A, A E esse aequales: ergo patet propositum.

## PROBL. III. PROP. XV.

*Dato perpendiculo, et plano ad ipsum inflexo, partem in perpendiculo infra extenso reperire, quae tempore eodem conficiatur; ac planum inflexum post casum ex dato perpendiculo.*

Sit perpendiculum A B ( Fig. LXIX. ) et planum ad ipsum inflexum B C. Oportet in perpendiculo infra extenso partem reperire, quae ex casu ab A conficiatur tempore eodem, atque B C ex eodem casu ab A. Ducatur horizontalis A D, cui occurrat C B extensa in D, et ipsarum C D, D B media sit D E, et B F ponatur aequalis B E, deinde ipsarum B A, A F, tertia proportionalis sit A G. Dico B G esse spatium, quod post casum A B conficitur tempore eodem, ac planum B C post eundem casum. Si enim ponamus tempus per A B esse ut A B, erit tempus per D B ut D B, et quia D E est media inter B D, D C, erit eadem D E tempus per totam D C, et B E tempus per reliquam B C ex quiete in D, seu ex casu A B; et similiter concludetur, B F esse tempus per B G, post casum eundem: est autem B F aequalis B E: ergo patet propositum.

## THEOR. XIII. PROP. XVI.

*Si plani inclinati, et perpendiculi partes, quarum tempora lationum ex quiete sint aequalia, ad idem punctum componantur, mobile veniens ex qualibet altitudine sublimiori citius absolvet eandem partem plani inclinati, quam ipsam partem perpendiculi.*

Sit perpendiculum E B, (Fig. LXX.) et planum inclinatum C E ad idem punctum E composita, quorum tempora lationum ex quiete in E sint aequalia, et in perpendiculo extenso sumptum sit quodlibet punctum sublime A, ex quo demittantur mobilia. Dico, tempore breviori absolvi planum inclinatum E C, quam perpendiculum E B post casum A E. Jungatur C B, et ducta horizontali A D extendatur C E illi occurrens in D, et C D, D E media proportionalis sit D F, ipsarum vero B A, A E, media sit A G, et ducantur F G, D G. Et quia tempora lationum per E C, E B ex quiete in E sunt aequalia, erit angulus C rectus, ex Corollario secundo Propositionis sextae: estque rectus A, et anguli ad verticem E aequales: triangula igitur A E D, C E B sunt aequiangula, et latera circa aequales angulos proportionalia; ergo ut B E ad E C, ita D E ad E A. Rectan-

gulum ergo B E A est aequale rectangulo C E D: et quia rectangulum C D E, superat rectangulum C E D, quadrato E D, rectangulum vero B A E, superat rectangulum B E A quadrato E A; excessus rectanguli C D E super rectangulo B A E, hoc est quadrati F D super quadrato A G, erit idem cum excessu quadrati D E super quadrato A E, qui excessus est quadratum D A: est igitur quadratum F D, aequale duobus quadratis G A, A D, quibus est quoque aequale quadratum G D; ergo linea D F ipsi D G est aequalis, et angulus D G F, aequalis angulo D F G, et angulus E G F minor angulo E F G, et latus oppositum E F minus latere E G. Modo si intelligamus tempus casus per A E esse, ut A E, erit tempus per D E, ut D E; cumque A G media sit inter B A, A E, erit A G tempus per totam A B, et reliqua E G, erit tempus per reliquam E B ex quiete in A, et similiter concludetur E F, esse tempus per E C post descensum D E, seu post casum A E, demonstratum autem est E F minorem esse, quam E G: ergo patet propositum.

## COROLLARIUM.

Ex hac, atque ex praecedenti constat spatium, quod conficitur in perpendiculo, post casum ex sublimi, tempore eodem, quo conficitur planum inclinatum, minus esse eo, quod conficitur tempore eodem atque in inclinato non praecedente casu ex sublimi, majus tamen quam idem planum inclinatum: cum enim modo demonstratum sit, quod mobilium venientium ex termino sublimi A tempus conversi per E C ( Fig. LXXI. ) brevius sit tempore procedentis per E B constat spatium, quod conficitur per E B tempore aequali tempori per E C, minus esse toto spatio E B. Quod autem idem spatium perpendiculi majus sit, quam E C, manifestum fit sumpta figura praecedentis Propositionis, in qua partem perpendiculi B G confici demonstratum est tempore eodem cum B C post casum A B: hanc autem B G majorem esse quam B C, sic colligitur. Cum B E, F B aequales sint, B A vero minor B D, majorem rationem habet F B ad B A, quam E B ad B D, et componendo F A ad A B majorem habet, quam E D ad D B; est autem ut F A ad A B, ita G F ad F B, ( est enim A F media inter B A, A G, ) et similiter ut E D ad B D, ita est

C E ad E B; ergo G B ad B F majorem habet rationem, quam C B ad B E; est igitur G B major B C.

## PROBL. IV. PROP. XVII.

*Dato perpendiculo, et plano ad ipsum inflexo, in dato plano partem signare, in qua post casum in perpendiculo fiat motus tempore aequali ei, quo mobile datum perpendiculum ex quiete confecit.*

Sit perpendiculum A B, ( Fig. LXXII. ) et ad ipsum planum inflexum B E: oportet in B E spatium signare, per quod mobile post casum in A B moveatur tempore aequali ei, quo ipsum perpendiculum A B ex quiete confecit.

Sit horizontalis linea A D, cui occurrat in D planum extensum, et accipiatur F B aequalis B A, et fiat ut B D ad D F, ita F D ad D E. Dico, tempus per B E post casum in A B aequari tempori per A B ex quiete in A. Si enim intelligatur A B esse tempus per A B, erit D B tempus per D B. Cumque sit, ut B D ad D F, ita F D ad D E, erit D F tempus per totum planum D E, et B F per partem B E ex D, sed tempus per B E post D B, est idem ac post A B; ergo tempus per B E post

A B, erit B F, aequale scilicet tempori A B, ex quiete in A: quod erat propositum.

## PROBL. V. PROP. XVIII.

*Dato in perpendiculo quovis spatio a principio lationis signato, quod in dato tempore conficiatur, datoque quocunque alio tempore minori, aliud spatium in perpendiculo eodem reperire, quod in dato tempore minori conficiatur.*

Sit perpendiculum A, ( Fig. LXXIII. ) in quo detur spatium A B, cujus tempus ex principio A sit A B, sitque horizon C B E, et detur tempus ipso A B minus, cui in horizonte notetur aequale B C: oportet in eodem perpendiculo spatium eidem A B aequale reperire, quod tempore B C conficiatur. Jungatur linea A C. Cumque B C minor sit B A, erit angulus B A C minor angulo B C A. Constituatur ei aequalis C A E, et linea A E horizonti occurrat in puncto E, ad quam perpendicularis ponatur E D secans perpendiculum in D, et linea D F ipsi B A secetur aequalis. Dico ipsam F D esse perpendiculi partem, in qua latio ex principio motus in A absolvitur tempore B C dato. Cum enim in triangulo rectangulo A E D ab

angulo recto E perpendicularis ad latus oppositum A D ducta sit E B, erit A E media inter D A, A B, et B E media inter D B, B A, seu inter F A, A B, ( est enim F A ipsi D B aequalis. ) Cumque A B positum sit esse tempus per A erit A E seu E C tempus per totam A D, et E B tempus per A F, ergo reliqua B C erit tempus per reliquam F D: quod erat intentum.

## PROBL. VI. PROP. XIX.

*Dato in perpendiculo spatio quocunque a principio lationis peracto, datoque tempore casus: tempus reperire, quo aliud aequale spatium ubicunque in eodem perpendiculo acceptum, ab eodem mobili consequenter conficiatur.*

Sit in perpendiculo A B, ( Fig. LXXVI. ) quodcunque spatium A C ex principio lationis in A acceptum, cui aequale sit aliud spatium D B ubicunque acceptum, sitque datum tempus lationis per A C, sitque illud A C. Oportet reperire tempus lationis per D B post casum ex A. Circa totam A B semicirculus describatur A E B, et ex C ad A B perpendicularis sit C E; et jungatur A E, quae major erit quam E C. Secetur E F ipsi E C aequalis; dico reli-

quum F A esse tempus lationis per D B. Quia enim A E est media inter B A, A C; estque A C tempus casus per A C; erit A E tempus per totam A B. Cumque C E media sit inter D A, A C, ( est enim D A aequalis ipsi B C, ) erit C E, hoc est, E F, tempus per A D; ergo reliqua A F est tempus per reliquam D B, quod est propositum.

## COROLLARIUM.

Hinc colligitur, quod si alicujus spatii ponatur tempus ex quiete esse, ut ipsummet spatium; tempus illius post aliud spatium adjunctum, erit excessus medii inter adjunctum una cum spatio, et ipsum spatium super medium inter primum, et adjunctum. Veluti posito, quod tempus per A B (Fig. LXXV. ) ex quiete in A sit A B, addito A S, tempus per A B post S A erit excessus medii inter S B, B A, super medium inter B A, A S.

## PROBL. VII. PROP. XX.

*Dato quolibet spatio, et parte in eo post principium lationis, partem alteram versus finem reperire, quae conficiatur tempore eodem ac prima data.*

Sit spatium C B, ( Fig. LXXVI. ) et in eo pars C D data post principium lationis in C. Oportet partem alteram versus finem B reperire, quae conficiatur tempore eodem ac data C D. Sumatur media iter B C, C D, cui aequalis ponatur B A; et ipsarum B C, C A, tertia proportionalis sit C E. Dico, E B esse spatium, quod post casum ex C conficitur tempore eodem ac ipsum C D. Si enim intelligamus, tempus per totam C B esse ut C B; erit B A ( media scilicet inter B C, D ) tempus per C D. Cumque C A media sit inter B C, C E, erit C A tempus per C E; est autem tota B C tempus per totam C B; ergo reliqua B A erit tempus per reliquam E B post casum ex C; eadem vero B A fuit tempus per C D; ergo temporibus aequalibus conficiuntur C D, et E B ex quiete in A; quod erat faciendum.

## THEOR. IV. PROP. XXI.

*Si in perpendiculo fiat casus ex quiete, in quo a principio lationis sumatur pars quovis tempore peracta, post quam sequatur motus inflexus per aliquod planum utcunque inclinatum, spatium, quod in tali plano conficitur in tempore aequali tempori casus jam peracti in perpendiculo,*

*ad spatium jam peractum in perpendiculo majus erit quam duplum, minus vero quam triplum.*

Infra horizontem A E (Fig. LXXVII.) sit perpendiculum A B, in quo ex principio A fiat casus, cujus sumatur quaelibet pars A C; inde ex C inclinetur utcunque planum C G; super quo post casus in A C continuetur motus. Dico, quod spatium tali motu peractum per C G in tempore aequali tempori casus per A C, est plus quam duplum, minus vero quam triplum ejusdem spatii A C. Ponatur enim C F aequalis A C, et extenso plano G C usque ad horizontem in E, fiat, ut C E ad E F, ita F E ad E G. Si itaque ponatur tempus casus per A C esse, ut linea A C, erit C E tempus per E C et C F, seu C A, tempus motus per C G. Ostendendum itaque est, spatium C G ipso C A majus esse quam duplum, minus vero quam triplum. Cum enim sit, ut C E ad E F, ita F E ad E G, erit etiam ita C F ad F G. Minor autem est E C quam E F; quare et C F minor erit quam F G, et G C major quam dupla F C, seu A C. Cumque rursus F E minor sit, quam dupla ad E C, (est enim E C major C A, seu C F), erit quoque G F minor quam dupla ad F C, et G C minor quam tripla ad C F seu C A. Quod erat demonstrandum.

Poterat autem universalius idem proponi: quod enim accidit in perpendiculari, et plano inclinato, contingit etiam, si post motum in plano quodam inclinato inflectatur per magis inclinatum; ut videtur in altera figura: eademque est demonstratio.

## PROBL. VIII. PROP. XXII.

*Datis duobus temporibus inaequalibus, et spatio, quod in perpendiculo ex quiete conficitur tempore breviori ex datis: a puncto supremo perpendiculi usque ad horizontem planum inflectere, super quo mobile descendat tempore aequali longiori ex datis.*

Tempora inaequalia sint, A ( Fig. LXXVIII. ) majus, B vero minus; spatium autem, quod in perpendiculo conficitur ex quiete in tempore B, sit C D. Oportet ex termino C planum usque ad horizontem inflectere, quod tempore A conficiatur. Fiat ut B ad A, ita C D ad aliam lineam, cui linea C X aequalis ex C ad horizontem descendat: manifestum est, planum C X esse illud, super quo mobile descendit tempore dato A. Demonstratum enim est, tempus per planum inclinatum ad tempus in sua elevatione eam habere rationem, quam habet plani longitudo ad longitudinem ele-

vationis suae. Tempus igitur per C X ad tempus per C D est, ut C X ad C D, hoc est ut tempus A ad tempus B; tempus vero B est illud, quo conficitur perpendiculum C D ex quiete; ergo tempus A est illud, quo conficitur planum C X.

## PROBL. IX. PROP. XXIII.

*Dato spatio quovis tempore peracto ex quiete in perpendiculo, ex termino imo hujus spatii planum inflectere, super quo post casum in perpendiculo tempore eodem conficiatur spatium cuilibet spatio dato aequale; quod tamen majus sit quam duplum, minus vero quam triplum spatii peracti in perpendiculo.*

Sit in perpendiculo A S ( Fig. LXXIX. ) tempore A C peractum spatium A C ex quiete in A: cujus I R majus sit quam duplum, minus vero quam triplum. Oportet ex termino C planum inflectere, super quo mobile eodem tempore A C conficiat post casum per A C spatium ipsi I R aequale. Sint R N, N M, ipsi A C aequalia, et quam rationem habet residuum I M ad M N. eandem habeat A C linea ad aliam, cui aequalis applicetur C E ex C ad horizontem A E, quae extendatur versus O et

accipiantur C F, F G, G O aequales ipsis R N, N M, M I. Dico, tempus super inflexa C O, post casum A C, esse aequale tempori A C ex quiete in A. Cum enim sit, ut O G ad G F, ita F C ad C E; erit componendo ut O F ad F G, seu F C, ita F E ad E C, et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia ad omnia: nempe tota O E ad E F, ut F E ad E C. Sunt itaque O E, E F, E C, continue proportionales, quod cum positum sit, tempus per A C esse ut A C, erit C E tempus per E C; et E F tempus per totam E O, et reliquum C F per reliquam C O; est autem C F aequalis ipsi C A; ergo factum est quod fieri oportebat; est enim tempus C A tempus casus per A C ex quiete in A, C F vero ( quod aequatur C A ) est tempus per C O, post descensum per E C, seu post casum per A C; quod est propositum. Notandum autem est, quod idem accidet, si praecedens latio non in perpendiculo fiat, sed in plano inclinato, ut in sequenti figura, in qua latio praecedens facta sit per planum inclinatum A S infra horizontem A E; et demonstratio est prorsus eadem.

## SCHOLIUM.

Si diligenter attendatur, manifestum erit, quod quo minus data linea I R deficit a tripla ipsius A C, (Fig. LXXX.) eo planum inflexum, super quod facienda est secunda latio, puta C O, accedit vicinius ad perpendiculum, in quo tandem in tempore aequali A C conficitur spatium ad A C triplum. Cum enim I R proxima fuerit ad triplicitatem A C, erit I M aequalis fere ipsi M N. Cumque, ut I M ad M N in constructione, ita fiat A C ad C E, constat, ipsam C E paulo majorem reperiri quam C A, et quod consequens est, punctum E proximum reperiri puncto A, et C O cum C S acutissimum angulum continere, et fere mutuo coincidere. E contra vero, si data I R minimum quid major fuerit quam dupla ejusdem A C, erit I M brevissima linea: ex quo accidet, minimam quoque futuram esse A C respectu C E, quae longissima erit, et quam proxime accedet ad parallelam horizontalem per C productam. Indeque colligere possumus, quod, si in apposita figura post descensum per planum inclinatum A C fiat reflexio per lineam horizontalem, qualis esset C T, spatium, tempore aequali tempori descensus per A C, per quod mo-

bile consequenter moveretur, esset duplum spatii A C exacte. Videtur autem et hic accommodari consimilis ratiocinatio. Apparet enim ex eo, cum O E ad E F sit ut F E ad E C, ipsam F C determinare tempus per C O. Quod si pars horizontalis T C, dupla C A, divisa sit bifariam in V, extensa versus X in infinitum elongata erit, dum occursum cum producta A E quaerit, et ratio infinitæ T X ad infinitam V X non erit alia a ratione infinitae V X ad infinitam X C.

Istud idem alia aggressione concludere poterimus, consimile resumentes ratiocinium ei, quo usi sumus in propositionis primae demonstratione. Resumentes enim triangulum A B C (Fig. LXXXI,), nobis repraesentans in suis parallelis basi B C velocitatis gradus continue adauctos juxta temporis incrementa; ex quibus, cum infinitae sint, veluti infinita sunt puncta in linea A C, et instantia in quovis tempore, exurget superficies ipsa trianguli. Si intelligamus, motum per alterum tantum temporis continuari, sed non amplius motu accelerato, verum aequabili, juxta maximum gradum velocitatis acquisitae, qui gradus repraesentatur per lineam B C; ex talibus gradibus conflabitur aggregatum consimile parallelogrammo A D B C, quod duplum est trianguli A B C. Quare spatium, quod cum gradibus consimilibus tempore eodem conficietur, duplum erit

spatii peracti cum gradibus velocitatis a triangulo A B C repraesentatis. At in plano horizontali motus est aequabilis, cum nulla ibi sit causa accelerationis, aut retardationis; ergo concluditur, spatium C D, peractum tempore aequali tempori A C, duplum esse spatii A C; hoc enim motu ex quiete accelerato juxta parallelas trianguli conficitur; illud vero juxta parallelas parallelogrammi, quae, dum fuerint infinitae, duplae sunt ad parallelas infinitas trianguli.

Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperiatur, est in illo suapte natura indelebiliter impressus, dum externae causae accelerationis, aut retardationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit: nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus vero retardationis. Ex quo pariter sequitur, motum in horizontali esse quoque aeternum: si enim est aequabilis, non debilitatur, aut remittitur, et multo minus tollitur. Amplius, existente gradu celeritatis per naturalem descensum a mobili acquisito suapte natura indelebili, atque aeterno, considerandum occurrit, quod si post descensum per planum declive fiat reflexio per aliud planum acclive, jam in isto occurrit causa retardationis: in tali enim plano idem mobile naturaliter descendit; quare mixtio quaedam contrariarum affectionum

exurgit, nempe gradus illius celeritatis acquisitae in praecedenti descensu, qui per se uniformiter mobile in infinitum adduceret, et naturalis propensionis ad motum deorsum juxta illam eandem proportionem accelerationis, juxta quam semper movetur. Quare admodum rationabile videbitur, si inquirentes, quaenam contingant accidentia, dum mobile post descensum per aliquod planum inclinatum reflectatur per planum aliquod acclive, accipiamus gradum illum maximum in descensu acquisitum, idem per se perpetuo in ascendente plano servari; attamen in ascensu ei supervenire naturalem inclinationem deorsum, motum nempe ex quiete acceleratum juxta semper acceptam proportionem. Quod si forte haec intelligere fuerit subobscurum, clarius per aliquam delineationem explicabitur.

Intelligatur itaque, factum esse descensum per planum declive A B ( Fig. LXXXII. ), ex quo per aliud acclive B C continuetur motus reflexus, et sint primo plana aequalia, et ad aequales angulos super horizontem G H elevata. Constat jam, quod mobile ex quiete in A descendens per A B, gradus acquirit velocitatis juxta temporis ipsius incrementum: gradum vero in B esse maximum acquisitorum, et suapte natura immutabiliter impressum, sublatis scilicet causis accelerationis novae, aut retardationis: accelerationis, inquam,

si adhuc super extenso plano ulterius progrederetur: retardationis vero, dum super planum acclive B C fit reflexio: in horizontali autem G H aequabilis motus juxta gradum velocitatis ex A in B acquisitae in infinitum extenderetur. Esset autem talis velocitas, ut in tempore aequali tempori descensus per A B in horizonte conficeret spatium duplum ipsius A B. Modo fingamus, idem mobile eodem celeritatis gradu aequabiliter moveri per planum B C, adeo ut etiam in hoc tempore aequali tempori descensus per A B conficeret super B C extenso spatium duplum ipsius A B. Verum intelligamus statim atque ascendere incipit, ei suapte natura supervenire illud idem, quod ei contigit ex A super planum A B, nempe descensus quidam ex quiete secundum gradus eosdem accelerationis, vi quorum, ut in A B contigit, tempore eodem tantundem descendat in plano reflexo, quantum descendit per A B, manifestum est, quod ex ejusmodi mixtione motus aequabilis ascendentis, et accelerati descendentis perducetur mobile ad terminum C per planum B C. juxta eosdem velocitatis gradus, qui erunt aequales. Quod vero sumptis utcunque duobus punctis D, E, aequaliter ab angulo B remotis, transitus per D B fiat tempore aequali tempori reflexionis per B E, hinc colligere possumus. Ducta D F erit parallela ad B C; constat enim, descensum per

A D reflecti per D F, quod si post D mobile feratur per horizontalem D E, impetus in E erit idem cum impetu in D; ergo ex E ascendet in C, ergo gradus velocitatis in D est aequalis gradui in E. Ex his igitur rationabiliter asserere possumus, quod, si per aliquod planum inclinatum fiat descensus, post quem sequatur reflexio per planum elevatum, mobile per impetum conceptum ascendet usque ad eandem altitudinem, seu elevationem ab horizonte. Ut si fiat descensus per A B, feretur mobile per planum reflexum B C usque ad horizontalem A C; non tantum si inclinationes planorum sint aequales, verum etiam si inaequales sint, qualis est plani B D; assumptum enim prius est, gradus velocitatis esse aequales, qui super planis inaequaliter inclinatis acquiruntur, dum ipsorum planorum eadem fuerit supra horizontem elevatio. Si autem existente eadem inclinatione planorum E B, B D (Fig. LXXXIII.), descensus per E B impellere valet mobile per planum B D usque ad D, cum talis impulsus fiat propter conceptum velocitatis impetum in puncto B; sitque idem impetus in B, seu descendat mobile per A B, seu per E B; constat, quod expelletur pariter mobile per B D, post descensum per A B, atque per E B. Accidet vero, quod tempus ascensus per B D longius erit, quam per B C, prout descensus quoque per E B longiori fit tem-

pore, quam per A B: ratio autem eorundem temporum jam demonstrata est eadem, ac longitudinum ipsorum planorum. Sequitur modo, ut inquiramus proportionem spatiorum temporibus aequalibus peractorum in planis, quorum diversae sint inclinationes, eaedem tamen elevationes: hoc est, quae inter easdem parallelas horizontales comprehendantur. Id autem contingit juxta sequentem rationem.

## THEOR. XV. PROP. XXIV.

*Dato inter easdem parallelas horizontales perpendiculo, et plano elevato ab ejus imo termino, spatium, quod a mobili post casum in perpendiculo, super plano elevato conficitur in tempore aequali tempori easus, majus est ipso perpendiculo, minus tamen quam duplum ejusdem perpendiculi.*

Inter easdem parallelas horizontales B C, H G (LXXXIV.), sint perpendiculum A E, et planum elevatum E B, super quo post casum in perpendiculo A E ex termino E, fiat reflexio versus B. Dico, spatium, per quod mobile ascendit in tempore aequali tempori descensus A E, majus esse quam A E, minus vero quam duplum ejusdem A E. Ponatur E D, ipsi A E aequale, et ut E B ad B D, ita fiat D B ad B F.

Ostendetur primo, punctum F esse signum, quo mobile motu reflexo per E B perveniet tempore aequali tempori A E: deinde, E F majus esse quam E A; minus vero quam duplum ejusdem. Si intelligamus, tempus descensus per A E esse, ut A E, erit tempus descensus per B E, seu ascensus per E B, ut ipsa linea B E: cumque D B media sit inter E B, B F, sitque B E tempus descensus per totam B E, erit B D tempus descensus per B F, et reliqua D E tempus descensus per reliquam F E. Verum idem est tempus per F E ex quiete in B, atque tempus ascensus per E F, dum in E fuerit velocitatis gradus per descensum B E seu A E acquisitus: ergo idem tempus D E erit id, in quo mobile post casum ex A per A E, motu reflexo per E B, pervenit ad signum F. Positum autem est, E D esse aequale ipsi A E, quod erat primo ostendendum. Et quia, ut tota E B ad totam B D, ita ablata D B ad ablatam B F, erit, ut tota E B ad totam B D, ita reliqua E D ad D F. Est autem E B major B D: ergo et E D major D F, et E F minor quam dupla D E, seu A E; quod erat ostendendum. Idem autem accidet, si motus praecedens non in perpendiculo, sed in plano inclinato fiat; eademque est demonstratio, dummodo planum reflexum sit minus acclive, nempe longius plano declivi.

## THEOR. XVI. PROP. XXV.

*Si post casum per aliquod planum inclinatum sequatur motus per planum horizontis, erit tempus casus per planum inclinatum ad tempus motus per quamlibet lineam horizontis, ut dupla longitudo plani inclinati ad lineam acceptam horizontis.*

Sit linea horizontis C B (Fig. LXXXV.) planum inclinatum A B, et post casum per A B sequatur motus per horizontem, in quo sumatur quodlibet spatium B D. Dico, tempus casus per A B ad tempus motus per B D esse, ut dupla A B ad B D. Sumpta enim B C ipsius A B dupla, constat ex praedemonstratis, tempus casus per A B aequari tempori motus per B C: sed tempus motus per B C ad tempus motus per D B est, ut linea C B ad lineam B D: ergo tempus motus per A B, ad tempus per B D, est ut dupla A B ad B D; quod erat probandum.

## PROBL. X. PROP. XXVI.

*Dato perpendiculo inter lineas parallelas horizontales, datoque spatio majori eodem perpendiculo, sed minori quam duplo ejusdem, ex imo termino perpendiculi planum attollere inter easdem parallelas, super quo motu reflexo post descen-*

*sum in perpendiculo conficiat mobile spatium dato aequale, et in tempore aequali tempori descensus in perpendiculo.*

Inter parallelas horizontales A O, B C (Fig. LXXXVI.), sit perpendiculum A B; F E vero major sit, quam B A, minor vero quam dupla ejusdem. Oportet ex B planum inter horizontales erigere, super quo mobile post casum ex A in B, motu reflexo, in tempore aequali tempori descensus per A B conficiat ascendendo spatium aequale ipsi E F. Ponatur E D aequalis A B, erit reliqua D F minor, cum tota E F minor sit quam dupla ad A B: sit D I aequalis D F, et ut E I ad I D, ita fiat D F ad aliam F X, atque ex B reflectatur recta B O aequalis E X. Dico planum per B O esse illud, super quo post casum A B mobile in tempore aequali tempori casus per A B pertransit ascendendo spatium aequale dato spatio E F. Ipsis E D, D F aequales ponantur B R, R S: cum enim sit, ut E I ad I D, ita D F ad F X: erit componendo, ut E D ad D I, ita D X ad X F; hoc est, ut E D ad D F, ita D X ad X F, et E X ad X D; hoc est, ut B O ad O R, ita R O ad O S. Quod si ponamus, tempus per A B esse A B, erit tempus per O B ipsa O B; et R O tempus per O S; et reliqua B R tempus per reliquum S B, descendendo ex O in B. Sed tempus descensus per S B ex

quiete in O est aequale tempori ascensus ex B in S post descensum A B: ergo B O est planum ex B elevatum, super quo post descensum per A B conficitur tempore B R seu B A spatium B S aequale spatio dato E F. Quod facere oportebat.

## THEOR. XVII. PROP. XXVII.

*Si in planis inaequalibus, quorum eadem sit elevatio, descendat mobile, spatium, quod in ima parte longioris conficitur in tempore aequali ei, in quo conficitur totum planum brevius, est aequale spatio, quod componitur ex ipso breviori plano, et ex parte, ad quam idem brevius planum eam habet rationem, quam habet planum longius ad excessum, quo longius brevius superat.*

Sit planum A C (Fig. LXXXVII) longius, A B vero brevius, quorum eadem sit elevatio A D; et ex ima parte A C sumatur C E aequale ipsi A B; et quam rationem habet totum C A ad A E, (nempe ad excessum plani C A super A B) hanc habeat C E ad E F. Dico, spatium F C esse illud, quod conficitur post discessum ex A tempore aequali tempori descensus per A B. Cum enim totum C A ad totum A E sit, ut ablatum C E ad ablatum E F; erit reliquum E A ad reliquum A F, ut totum C A ad totum A E. Sunt

Itaque tres C A, A E, A F, continue proportionales. Quod si ponatur, tempus per A B esse ut A B; erit tempus per A C ut A C, tempus vero per A F, erit ut A E, et per reliquum F C, erit ut E C; est autem E C ipsi A B aequale: ergo fit propositum.

## THEOR. XVIII. PROP. XXVIII.

Tangat horizontalis linea AG (Fig. LXXXVIII.) circulum, et contactu sit diameter A B, et duae chordae utcunque A E B. Determinanda sit ratio temporis casus per A B ad tempus descensus per ambas A E B. Extendatur B E usque ad tangentem in G, et angulus B A E bifariam secetur, ducta A F. Dico, tempus per A B ad tempus per A E B esse, ut A E ad A E F. Cum enim angulus F A B aequalis sit angulo F A E; angulus vero E A G angulo A B F; erit totus G A F duobus F A B, A B F aequalis; quibus aequatur quoque angulus G F A; ergo linea G F ipsi G A est aequalis. Et quia rectangulum B G E aequatur quadrato G A; erit quoque æquale quadrato G F, et tres lineae B G, G F, G E, proportionales. Quod si ponatur, A E esse tempus per A E, erit G E tempus per G E; et G F tempus per totam G B, et E F tempus per E B, post descensum ex G, seu ex A per A E. Tempus igitur per A E, seu per A B ad tempus per A

E B est, ut A E ad A E F; quod erat determinandum.

Aliter brevius. Secetur G F æqualis G A; constat, G F esse mediam proportionalem inter B G, G E. Reliqua ut supra.

## PROBL. XI. PROP. XXIX.

*Dato quolibet spatio horizontali, ex cujus termino erectum sit perpendiculum, in quo sumatur pars aequalis dimidio spatii in horizontali dato, mobile ex tali altitudine descendens, et in horizontali conversum, conficiet horizontale spatium una cum perpendiculo breviori tempore, quam quodcunque aliud spatium perpendiculi cum eodem spatio horizontali.*

Sit planum horizontale, in quo datum sit quodlibet spatium B C (Fig. LXXXIX.) et ex termino B sit perpendiculum, in quo B A sit dimidium ipsius B C. Dico, tempus, quo mobile ex A demissum conficiet ambo spatia A B, B C, esse temporum omnium brevissimum, quibus idem spatium B C cum parte perpendiculi, sive majori, sive minori parte A B, conficeretur. Sit sumpta major, ut in prima figura, vel minor, ut in secunda, E B. Ostendendum est, tempus, quo conficiuntur spatia B E, B C, longius esse tempore, quo conficiuntur A B, B C. Intelligatur,

tempus per A B esse ut A B; erit quoque tempus motus in horizontali B C, cum B C dupla sit ad A B et per ambo spatia A B C, tempus erit dupla B A. Sit B O media inter E B, B A. Erit B O tempus casus per E B. Sit præterea horizontale spatium B D duplum ipsius B E; constat, tempus ipsius post casum E B esse idem B O. Fiat, ut D B ad B C, seu ut E B ad B A, ita O B ad B N, et cum motus in horizontali sit aequabilis, sitque O B tempus per B D post casum ex E, erit N B tempus per B C post casum ex eadem altitudine E. Ex quo constat, O B cum A N esse tempus per E B C; cumque dupla B A sit tempus per A B C; ostendendum relinquitur, O B cum B N majora esse quam dupla B A; cum autem O B media sit inter E B, B A; ratio E B ad B A dupla est rationis O B ad B A; et cum E B ad B A sit, ut O B ad B N, erit quoque ratio O B ad B N dupla rationis O B ad B A; verum ipsa ratio O B ad B N componitur ex rationibus O B ad B A, et A B ad B N: ergo ratio A B ad B N est eadem cum ratione O B ad B A. Sunt igitur B O, B A, B N trés continue proportionales, et O B cum B N majores quam dupla B A. Ex quo patet propositum.

## THEOR. XIX. PROP. XXX.

*Si ex aliquo puncto lineae horizontalis descendat perpendiculum, ex alio vero puncto in eadem horizontali sumpto ducendum sit planum usque ad perpendiculum, per quod mobile tempore brevissimo usque ad perpendiculum descendat: tale planum erit illud, quod de perpendiculo abscindit partem aequalem distantiae puncti accepti in horizontali a termino perpendiculi.*

Sit perpendiculum B D (Fig. xc.) ex puncto B horizontalis lineae A C descendens, in qua sit quodlibet punctum C, et in perpendiculo ponatur distantia B E aequalis distantiae B C, et ducatur C E. Dico, planorum omnium ex puncto C usque ad perpendiculum inclinatorum C E esse illud, super quo tempore omnium brevissimo fit descensus usque ad perpendiculum. Inclinentur enim supra, et infra plana C F, C G, et ducatur I K circulum semidiametro B C descriptum tangens in C, quae erit perpendiculo aequidistans, et ipsi C F parallela sit E K, usque ad tangentem protracta, secans circumferentiam circuli in L; constat tempus casus per L E esse aequale tempori casus per C E, sed tempus per K E est longius, quam per L E; ergo tempus per K E longius est, quam per C E; sed tempus per K E aequa-

tur tempori per C F, cum sint aequales, et secundum eandem inclinationem ductae: similiter cum C G, et I E sint aequales, et juxta eandem inclinationem inclinatae, tempora lationum per ipsas erunt æqualia: sed tempus per H E breviorem ipsa I E est brevius tempore per I E; ergo tempus quoque per C E, (quod æquatur tempori per H E,) brevius erit tempore per I E. Patet ergo propositum.

## THEOR. XX. PROP. XXXI.

*Si linea recta super horizontalem fuerit utcunque inclinata: planum a dato puncto in horizontali usque ad inclinatam extensum, in quo descensus fit tempore omnium brevissimo, est illud, quod bifariam dividit angulum contentum a duabus perpendicularibus a dato puncto extensis, una ad horizontalem lineam, altera ad inclinatam.*

Sit C D (Fig. XCI.) linea supra horizontalem A B utcunque inclinata, datoque in horizontali quocunque puncto A, educantur ex eo A C perpendicularis ad A B, A E vero perpendicularis ad C D, et angulum C A E bifariam dividat F A linea. Dico, planorum omnium ex quibuslibet punctis lineae C D ad punctum A inclinatorum extensum per F A esse, in quo tempore omnium brevissimo

fiat descensus. Ducatur F G ipsi A E parallela, erunt anguli G F A, F A E coalterni aequales: est autem E A F ipsi F A G aequalis: ergo trianguli latera F G, G A aequalia erunt. Si itaque centro G intervallo G A circulus describatur, transibit per F et horizontalem, et inclinatam tanget in punctis A F: est enim angulus G F C rectus, cum G F ipsi A E sit aequidistans: ex quo constat lineas omnes usque ad inclinatam ex puncto A productas extra circumferentiam extendi, et quod consequens est, lationes per ipsas longiori tempore absolvi, quam per F A. Quod erat demonstrandum.

## LEMMA.

*Si duo circuli se se intus contingant, quorum interiorem quaelibet linea recta contingat, exteriorem vero secet, tres lineae a contactu circulorum ad tria puncta rectae lineae tangentis, nempe ad contactum interioris circuli, et ad sectiones exterioris protractae angulos in contactu circulorum aequales continebunt.*

Tangant se intus in puncto A ( Fig. xcii.) duo circuli, quorum centra, B minoris, C majoris: interiorem vero circulum contingat recta quaelibet linea F G in puncto H, majorem autem secet in punctis F, G,

et connectantur tres lineae A F, A H, A G. Dico, angulos ab illis contentos F A H, G A H esse aequales. Extendatur A H usque ad circumferentiam in I, et ex centris producantur B H, C I, et per eadem centra ducta sit B C, quae extensa cadet in contactum A, et in circumferentias circulorum in O, et N. Et quia anguli I C N, H B O aequales sunt, cum quilibet ipsorum duplus sit anguli I A N, erunt lineae B H, C I parallelae. Cumque B H ex centro ad contactum sit perpendicularis ad F G, erit quoque ad eandem perpendicularis C I, et arcus F I arcui I G aequalis, et quod consequens est, angulus F A I, angulo I A G. Quod erat ostendendum.

## THEOR. XXI. PROP. XXXII.

*Si in horizonte sumantur duo puncta, et ab altero ipsorum quaelibet linea versus alterum inclinetur, ex quo ad inclinatam recta linea ducatur, ex ea partem abscindens aequalem ei, quae inter puncta horizontis intercipitur, casus per hanc ductam citius absolvetur, quam per quascunque alias rectas ex eodem puncto ad eandem inclinatam protractas. In aliis autem, quae per angulos aequales hinc inde ab hac distiterint, casus fiunt temporibus inter se aequalibus.*

Sint in horizonte duo puncta A, B (Fig. XCIII.), et e B inclinetur recta B C, in qua ex termino B sumatur B D ipsi B A aequalis, et jungatur A D. Dico, casum per A D velocius fieri, quam per quamlibet ex A ad inclinatam B C productam. Ex punctis enim A, D ad ipsas B A, B D, perpendiculares ducantur A E, D E, se se in E secantes; et quia in triangulo aequicruri A B D anguli B A D, B D A sunt aequales, erunt reliqui ad rectos D A E, E D A aequales, ergo centro E intervallo E A descriptus circulus per D quoque transibit: et lineas B A, B D tanget in punctis A, D. Et cum A sit terminus perpendiculi A E, casus per A D citius absolvetur, quam per quamcunque aliam ex eodem termino A usque ad lineam B C ultra circumferentiam circuli extensam, quod erat primo ostendendum.

Quod si extenso perpendiculo A E, in eo sumatur quodvis centrum F, et secundum intervallum F A circulus A G C describatur tangentem lineam in punctis G, C secans: junctae A G, A C per angulos aequales a media A D ex ante demonstratis dirimentur, et per ipsas lationes temporibus aequalibus absolventur, cum ex puncto sublimi A ad circumferentiam circuli A G C terminentur.

## PROBL. XII. PROP. XXXIII.

*Dato perpendiculo, et plano ad ipsum inclinato, quorum eadem sit altitudo, idemque terminus sublimis, punctum in perpendiculo supra terminum communem reperire, ex quo si demittatur mobile, quod postea convertatur per planum inclinatum, ipsum planum conficiat tempore eodem, quo ipsum perpendiculum ex quiete conficeret.*

Sint perpendiculum, et planum inclinatum, quorum eadem sit altitudo, A B, A C (Fig. xciv.) oportet in perpendiculo B A, producto ex parte A, punctum reperire, ex quo descendens mobile conficiat spatium A C eodem tempore, quo conficit datum perpendiculum A B ex quiete in A. Ponatur D C E ad angulos rectos ad A C, et secetur C D aequalis A B, et jungatur A D: erit angulus A D C major angulo C A D, (est enim C A major quam A B, seu C D.) fiat angulus D A E aequalis angulo A D E, et ad ipsam A E perpendicularis sit E F plano inclinato, et utrique extenso occurrens in F, et utraque A I, A G ponatur ipsi C F aequalis, et per G ducatur G H horizonti aequidistans. Dico, H esse punctum, quod quaeritur.

Intelligatur enim tempus casus per perpendiculum A B esse A B, erit tempus per A C ex quiete in A ipsamet A C. Cumque in triangulo rectangulo A E F ab angulo recto E perpendicularis ad basim A F sit acta E C, erit A E media inter F A, A C, et C E media inter A C, C F, hoc est, inter C A, A I, et cum ipsius A C tempus ex A sit A C; erit A E tempus totius A F, et E C tempus ipsius A I. Quia vero in triangulo æquicruri A E D latus A E æquale lateri E D, erit E D tempus per A F, et est E C tempus per A I; ergo C D, hoc est A B, erit tempus per I F ex quiete in A, quod idem est ac si dicamus, A B esse tempus per A C ex G, seu ex H; quod erat faciendum.

PROBL. XIII. PROP. XXXIV.

*Dato plano inclinato, et perpendiculo, quorum idem sit sublimis terminus, punctum sublimius in perpendiculo extenso reperire, ex quo mobile decidens, et per planum inclinatum conversum utcunque, conficiat tempore eodem, ac solum planum inclinatum ex quiete in ejus superiori termino.*

Siut planum inclinatum, et perpendiculum, A B, A C (Fig. xcv.) quorum

idem sit terminus A. Oportet in perpendiculo ad partes A extenso punctum sublime reperire, ex quo mobile decidens, et per planum A B conversum, partem assumptam perpendiculi, et planum A B, conficiat tempore eodem, ac solum planum A B ex quiete in A.

Sit horizontalis linea B C, et secetur A N æqualis A C: et ut A B ad B N; ita fiat A L ad L C: et ipsi A L ponatur æqualis A I, et ipsarum A C, B I, tertia proportionalis sit C E in perpendiculo A C producto signata. Dico, C E esse spatium quæsitum: adeo ut extenso perpendiculo supra A, et assumpta parte A X ipsi C E æquali, mobile ex X conficiet utrumque spatium X A B æquali tempore, ac solum A B ex A Ponatur horizontalis X R æquidistans B C, cui occurrat B A extensa in R, deinde producta A B in D, ducatur E D æquidistans C B, et supra A D semicirculus describatur, et ex B ipsi D A perpendicularis erigatur B F usque ad circumferentiam. Patet, F B esse mediam inter A B, B D, et ductam F A mediam inter D A, A B Ponatur B S æqualis B I, et F H æqualis F B. Et quia, ut A B ad B D, ita A C ad C E, estque B F media inter A B, B D, et B I media inter A C, C E; erit ut B A ad A C, ita F B ad B S. Et cum sit ut B A ad A C, seu ad A N, ita F B ad B S, erit per conversionem rationis B F ad F S, ut A B ad B N,

hoc est, A L ad L C; rectangulum igitur sub F B, C L, aequatur rectangulo sub A L, S F; hoc autem rectangulum A L, S F, est excessus rectanguli sub A L, F B, seu A I, B F, super rectangulo A I, B S, seu A I B; rectangulum vero F B, L C est excessus rectanguli A C, B F, super rectangulo A L, B F; rectangulum autem A C, B F, aequatur rectangulo A B I; ( est enim ut B A ad A C, ita F B, ad B I ) excessus igitur rectanguli A B I super rectangulo A I, B F, seu A I, F H, aequatur excessui rectanguli A I, F H, super rectangulo A I B; ergo bina rectangula A I, F H, æquautur duobus A B I, A I B: nempe binis A I B, cum quadrato B I. Commune sumatur quadratum A I, erunt bina rectangula A I B, cum duobus quadratis A I, I B, nempe quadratum ipsum A B, aequale binis rectangulis A I, F H, cum quadrato A I. Communiter rursus assumpto quadrato B F, erunt duo quadrata A B, B F; nempe unicum quadratum A F, aequale binis rectangulis A I, F H, cum duobus quadratis A I, F B, id est A I, F H. Verum idem quadratum A F aequale est binis rectangulis A H F, cum duobus quadratis A H, H F; ergo bina rectangula A I, F H, cum quadratis A I, F H, eaqualia sunt binis rectangulis A H F cum quadratis A H, H F; et dempto communi qua-

drato H F bina rectangula A I, F H, cum quadrato A I erunt æqualia qinis rectangulis A H F cum quadrato A H. Cumque rectangulorum omnium F H sit latus commune, erit linea A H aequalis lineae A I; si enim major, vel minor esset, rectangula quoque F H A, et quadratum H A, majora vel minora essent rectangulis F H, I A, et quadrato I A; contra id, quod demonstratum est.

Modo si intelligamus tempus casus per A B esse ut A B, tempus per A C erit ut A C, et ipsa I B media inter A C, C E, erit tempus per C E, seu per X A ex quiete in X, cumque inter D A, A B, seu R B, B A media sit A F, inter vero A B, B D, id est R A, A B, media sit B F, cui æquatur F H, erit ex prædemonstratis excessus A H tempus per A B ex quiete in R, seu post casum ex X; dum tempus ejusdem A B ex quiete in A fuerit A B. Tempus igitur per X A, est I B; per A B vero post R A, seu post X A, est A I; ergo tempus per X A B erit ut A B, idem nempe cum tempore per solam A B ex quiete in A. Quod erat propositum.

## PROBL. XIV. PROP. XXXV.

*Data inflexa ad datum perpendiculum, partem in inflexa accipere, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, atque in eadem cum perpendiculo.*

Sit perpendiculum A B; ( Fig. cvi. ) et ad ipsum inflexa B C. Oportet in B C partem accipere, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, ac in eadem cum perpendiculo A B. Ducatur horizon A D, cui inclinata C B extensa occurrat in E; ponaturque B F æqualis B A; et centro E intervallo E F circulus describatur F I G; et F E ad circumferentiam usque protrahatur in G; et ut G B ad B F, ita fiat B H ad H F; et H I circulum tangat in I. Deinde ex B perpendicularis ad F C erigatur B K, cui occurrat in L linea E I L; tandem ipsi E L perpendicularis ducatur L M occurrens B G in M. Dico, in linea B M ex quiete in B fieri motum eodem tempore, ac ex quiete in A per ambas A B, B M. Ponatur E N æqualis E L. Cumque ut G B ad BF, ita sit B H ad H F; erit permutando, ut G B ad B H, ita B F ad F H et dividendo G H ad H B, ut B H ad H F. Quare rectangulum G H F quadrato H B erit æquale: sed idem rectangulum æquatur quoque quadrato H I;

ergo B H ipsi H I est æqualis. Cumque in quadrilatero I L B H latera H B, H I sint æqualia, et anguli B, I recti, erit latus quoque B L ipsi L I æquale: est autem E I æqualis E F; ergo tota L E, seu N E, duabus L B, E F est æqualis: auferatur communis E F; erit reliqua F N ipsi L B æqualis; at posita est F B æqualis ipsi B A; ergo L E duabus A B, B N æquatur. Rursus si intelligatur, tempus per A B esse ipsam A B; erit tempus per E B ipsi E B æquale: tempus autem per totam E M erit E N, media scilicet inter M E; E B; quare reliquæ B M tempus casus post E B, seu post A B, erit ipsa B N. Positum autem est, tempus per A B esse A B: ergo tempus casus per ambas A B M est A B N; cum autem tempus per E B ex quiete in E sit E B; tempus per B M ex quiete in B erit media proportionalis inter B E; B M; haec autem est B L: tempus igitur per ambas A B M ex quiete in A est A B N; tempus vero per B M solam ex quiete in B est B L: ostensum autem est, B L esse æqualem duabus A B, B N; ergo patet propositum.

Aliter magis expedite.

Sit B C (Fig. XCVII.) planum inclinatum, B A perpendiculum. Ducta perpendiculari per B ad E C, et utrinque extensa, ponatur B H æqualis excessus B E super B A: et angulo B H E ponatur æqualis angulus H E L: ipsa vero E L extensa oc-

currat B K in L; et ex L excitetur perpendicularis ad E L, L M occurrens B C in M. Dico, B M esse spatium in plano E C quæsitum. Quia enim angulus M L E rectus est, erit B L media inter M B, B E; et L E media inter M E, E B, cui E L secetur æqualis E N; et erunt tres lineæ N E, E L, L H æquales, et H B erit excessus N E super B L. Verum eadem H B est etiam excessus N E super N B, B A; ergo duæ N B, B A, æquales sunt B L. Quod si ponatur, E B esse tempus per E B; erit B L tempus per B M ex quiete in B; et B N erit tempus ejusdem post E B, seu post A B; et A B erit tempus per A B; ergo tempora per A B M, nempe A B N, æqualia sunt tempori per solam B M ex quiete in B: quod est intentum.

## LEMMA.

Sit D C (Fig. XCVIII) ad diametrum B A perpendicularis, et a termino B educatur B D E utcunque, et connectatur F B. Dico F B inter D B, B E esse mediam. Connectatur E F: et per B ducatur tangens B G; quæ erit ipsi C D parallela: quare angulus D B G angulo F D B erit æqualis: at eidem G B D æquatur quoque angulus E F B in portione alterna: ergo similia sunt triangula F B D, F E B; et ut B D ad B F, ita F B ad B E.

## LEMMA.

Sit linea A C, ( Fig. xcix. ) major ipsa D F; et habeat A B ad B C majorem rationem, quam D E ed E F. Dico, A B ipsa D E esse majorem. Quia enim A B ad B C majorem rationem habet, quam D E ad E F, quam rationem habet A B ad B C, hanc habebit D E ad minorem quam E F: habeat ad E G: et quia A B ad B C est, ut D E ad E G, erit componendo, et per conversionem rationis, ut C A ad A B, ita G D ad D E: est autem C A major G D: ergo B A ipsa D E major erit.

## LEMMA.

Sit circuli quadrans A C I B. (Fig. c.) et ex B ipsi A C parallela B E; et ex quovis centro in ea sumpto circulus B O E S descriptus tangens A B in B, et secans circumferentiam quadrantis in I; et juncta sit C B, et C I usque ad S extensa. Dico, lineam C I minorem semper esse ipsa C O. Jungatur A I, quæ circulum B O E tanget. Si enim ducatur D I, erit æqualis ipsi D B; cum vero D B quadrantem tangat, tanget etiam eumdem D I: et

ad diametrum A I erit perpendicularis. Quare et ipsa A I circulum B O E tanget in I. Et quia angulus A I C major est angulo A B C, cum majori insistat peripheriæ: ergo angulus quoque S I N ipso A B C major erit; quare portio I E S major est portione B O; et linea C S centro vicinior major ipsa C B: quare et C O major C I; cum S C ad C B sit, ut O C ad C I.

Idem autem magis accidet, si (ut in altera figura) B I C (Fig. 61.) quadrante fuerit minor; nam perpendicularis D B circulum secabit C I B; quare D I quoque, cum ipsi D B sit æqualis, et angulus D I A erit obtusus, et ideo A I N circulum quoque B I N secabit: cumque angulus A B C minor sit angulo A I C, qui æquatur ipsi S I N; iste autem est adhuc minor eo, qui ad contactum in I fieret per lineam S I; ergo portio S E I est longe major portione B O; unde, etc. quod erat demonstrandum.

## THEOR. XXII. PROP. XXXVI.

*Si in circulo ad horizontem erecto ab imo puncto elevetur planum non majorem subtendens circumferentiam quadrante, a terminis cujus duo alia plana ad quodlibet circumferentiae punctum infle-*

*çantur, descensus in planis ambobus inflexis breviori tempore absolvetur, quam in solo priori plano elevato, vel quam in altero tantum ex illis duobus, nempe in inferiori.*

Sit circuli ad horizontem erecti ab imo puncto C ( Fig. CII. ) circumferentia C B D, non major quadrante, in qua sit planum elevatum C D, et duo plana a terminis D, C, inflexa ad quodlibet punctum B in circumferentia sumptum: dico, tempus descensus per ambo plana D B C brevius esse tempore descensus per solum D C, vel per unicum B C ex quiete in B. Ducta sit per D horizontalis M D A; cui C B extensa occurrat in A: sintque D N, M C ad M D, et B N ad B D perpendiculares: et circa triangulum rectangulum D B N semicirculus describatur D F B N, secans D C in F: et ipsarum C D, D F media sit proportionalis D O; ipsarum autem C A, A B media sit A V. Sit autem P S tempus, quo peragitur tota D C, vel B C, ( constat enim, tempore eodem peragi utramque ) et quam rationem habet C D ad D O, hanc habeat tempus S P ad tempus P R: erit tempus P R id, in quo mobile ex D peragit D F; R S vero id, in quo reliquum F C. Cum vero P S sit quoque tempus, quo mobile ex B peragit B C; si fiat ut B C ad C D, ita S P ad P T; erit P T tempus casus ex A in C; cum D C media sit inter A C, C B, ex ante demonstratis. Fiat tantum, ut C A

ad A V, ita T P ad P G; erit P G tempus, quo mobile ex A venit in B; G T vero tempus residuum motus B C consequentis post motum ex A in B. Cum vero D N circuli D F N diameter ad horizontem sit erecta, temporibus aequalibus peragentur D F et D B lineæ. Quare si demonstratum fuerit, mobile citius permeare B C post casum D B, quam F C post peractam D F, habebimus intentum. At eadem temporis celeritate conficit mobile veniens ex D per D B ipsam B C; ac si venerit ex A per A B; cum ex utroque casu D B, A B, aequalia accipiat velocitatis momenta; ergo demostrandum erit, breviori tempore peragi B C post A B quam F C post D F. Explicatum est autem, tempus, quo peragitur B C post A B, esse G T: tempus vero ipsius F C post D F esse R S. Ostendendum itaque est, R S majus esse quam G T: quod sic ostenditur; quia ut S P ad P R, ita C D ad D O per conversionem rationis; et convertendo, ut R S ad S P, ita O C ad C D: ut autem S P ad P T, ita D C ad C A: et quia est ut T P ad P G, ita C A ad A V; per conversionem rationis erit quoque ut P T ad T G, ita A C ad C V; ergo ex aequali, ut R S ad G T, ita O C ad C V; est autem O C major quam C V, ut mox demonstrabitur; ergo tempus R S majus est tempore G T; quod demonstrare oportebat. Cum vero C F

major sit C B, F D vero minor B A; habebit C D ad D F majorem rationem, quam C A ad A B; ut autem C D ad D F, ita quadratum C O ad quadratum O F; cum sint C D, D O, D F, proportionales, ut vero C A ad A B, ita quadratum C V ad quadratum V B; ergo C O ad O F majorem rationem habet quam C V ad V B; igitur ex Lemmate prædicto C O major est quam C V. Constat insuper, tempus per D C ad tempus per D B C esse, ut D O C ad D O cum C V.

## SCHOLIUM.

Ex his, quae demonstrata sunt, colligi posse videtur, lationem omnium velocissimam ex termino ad terminum, non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri. In quadrante enim B A E C, cujus latus B C (Fig. CIII) sit ad horizontem erectum, divisus sit arcus A C in quotcunque partes aequales, A D, D E, E F, F G, G C; et ductae sint rectae ex C ad puncta A, D, E, F, G; et junctae sint rectae quoque A D, D E, E F, F G, G C. Manifestum est, lationem per duas A D C citius absolvi, quam per unam A C, vel D C ex quiete in D; sed ex quiete in A citius absolvitur D C, quam duae A D C; sed per duas D E C ex quiete in A verisimile est citius absolvi

descensum, quam per solam C D. Ergo descensus per tres A D E C absolvitur citius, quam per duas A D C. Verum similiter procedente descensu per A D E, citius fit latio per duas E F C, quam per solam E C. Ergo per quatuor A D E F C citius fit motus, quam per tres A D E C. Ac tandem per duas F G C post praecedentem descensum per A D E F citius absolvitur latio, quam per solam F C. Ergo per quinque A D, E F G C breviori adhuc tempore fit descensus, quam per quatuor A D E F C. Quo igitur per inscriptos polygonos magis ad circumferentiam accedimus, eo citius absolvitur motus inter duos terminos signatos A C.

Quod autem in quadrante explicatum est, contigit etiam in circumferentia quadrante minori; et idem est ratiocinium.

## PROBL. XV. PROP. XXXVII.

*Dato perpendiculo, et plano inclinato, quorum eadem sit elevatio, partem in inclinato reperire, quae sit aequalis perpendiculo, et conficiatur eodem tempore ac ipsum perpendiculum.*

Sint A B ( Fig. CIV.) perpendiculum, et A C planum inclinatum. Oportet in inclinato partem reperire aequalem perpendiculo A B, quae post quietem in A con,

ficiatur tempore aequali tempori, quo conficitur perpendiculum. Ponatur A D aequalis A B; et reliqua D C bifariam secetur in I; et ut A C ad C I, ita fiat C I ad aliam A E; cui ponatur aequalis D G. Patet, E G aequalem esse A D, et A B. Dico insuper, hanc E G eam esse, quae conficitur a mobili veniente ex quiete in A tempore aequali tempori, quo mobile cadit per A B. Quia enim, ut A C ad C I, ita C I ad A E, seu I D ad D G; erit per conversionem rationis, ut C A ad A I, ita D I ed I G. Cum itaque sit ut totum C A ad totum A I, ita ablatum C I ad ablatum I G: erit reliquum A ad reliquum A G, ut totum C A ad totum A I. Est itaque A I media inter C A, A G; et C I media inter C A, A E. Si itaque ponatur, tempus per A B esse ut A B, erit A C tempus per A C; et C I, seu I D tempus per A E; cumque A I media sit inter C A, A G; sitque C A tempus per totam A C; erit A I tempus per A G: et reliquum I C per reliquum G C: fuit autem D I tempus per A E: sunt itaque D I, I C tempora per utrasque A E, C G; ergo reliquum D A erit tempus per E G, aequale nempe tempori per A B. Quod faciendum fuit.

## COROLLARIUM.

Ex his constat, spatium quaesitum esse intermedium inter partes superam, et inferam, quae temporibus aequalibus conficiuntur.

## PROBL. XVI. PROP. XXXVIII.

*Datis duobus planis horizontalibus a perpendiculo sectis, in perpendiculo punctum sublime reperire, ex quo cadentia mobilia, et in planis horizontalibus reflexa conficiant in temporibus aequalibus temporibus casuum in iisdem horizontalibus, in superioribus nempe, atque in inferiore, spatia, quae inter se habeant quamcumque datam rationem minoris ad majorem.*

Secta sint plana horizontalia, C D, B E ( Fig. cv. ), a perpendiculo A C B, sitque data ratio minoris ad majorem N ad F G. Oportet in perpendiculo A B punctum sublime reperire, ex quo mobile cadens, et in plano C D reflexum tempore æquali tempori sui casus spatium conficiat, quod ad spatium ab altero mobili ex eodem puncto sublimi veniente tempore aequali tempori sui casus, motu reflexo per B E planum, habeat rationem eandem cum data N ad F G. Ponatur G H

aequalis ipsi N; et ut F H ad H G, ita fiat B C ad C L. Dico, L esse punctum sublime quaesitum. Accepta enim C M dupla ad C L, ducatur L M plano B E occurrens in O; erit B O dupla B L. Et quia, ut F H ad H G, ita B C ad C L; erit componendo, et convertendo, ut H G, hoc est N ad G F, ita C L ad L B, hoc est C M ad B O. Cum autem C M dupla sit ad L C, fit, spatium C M esse illud, quod a mobili veniente ex L post casum L C conficitur in plano C D; et eadem ratione B O esse illud, quod conficitur post casum L B in tempore aequali tempori casus per L B; cum B O sit dupla ad B L; ergo patet propositum.

*Sagr.* Parmi veramente, che conceder si possa al nostro Accademico, che egli senza jattanza abbia nel principio di questo suo trattato potuto attribuirsi di arrecarci una nuova scienza intorno a un suggetto antichissimo. Ed il vedere con quanta felicità e chiarezza da un solo semplicissimo principio ei deduca le dimostrazioni di tante proposizioni, mi fa non poco maravigliare, come tal materia sia passata intatta da Archimede, Apollonio, Euclide, e tanti altri Matematici e Filosofi illustri, e massime che del moto si trovano scritti volumi grandi, e molti.

*Salv.* Si vede un poco di fragmento d' Euclide intorno al moto, ma non vi si scorge vestigio, che egli s' incamminasse

all' investigazione della proporzione della accelerazione, e delle sue diversità sopra le diverse inclinazioni. Talchè veramente si può dire essersi non prima che ora aperta la porta ad una nuova contemplazione, piena di conclusioni infinite ed ammirande, le quali nei tempi avvenire potranno esercitare altri ingegni.

*Sagr.* Io veramente credo, che siccome quelle poche passioni ( dirò per esempio ) del cerchio dimostrate nel terzo de' suoi elementi da Euclide sono l'ingresso ad innumerabili altre più recondite; così le prodotte, e dimostrate in questo breve trattato, quando passasse nelle mani di altri ingegni speculativi, farebbe strada ad altre ed altre più maravigliose; ed è credibile, che così seguirebbe mediante la nobiltà del soggetto sopra tutti gli altri naturali.

Lunga ed assai laboriosa giornata è stata questa d' oggi, nella quale ho gustato più delle semplici proposizioni, che delle loro dimostrazioni, molte delle quali credo, che per ben capirle mi porteranno via più d' un' ora per ciascheduna: studio che mi riserbo a farlo con quiete, lasciandomi V. S. il libro nelle mani, dopo che avremo veduto questa parte, che resta intorno al moto dei Projetti; che sarà, se così gli piace, nel seguente giorno.

*Salv.* Non mancherò d' esser con loro.

*Fine del Volume VIII.*

# *INDICE*

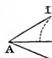
Del presente Volume.

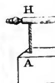


| | | ERRORI | CORREZIONI |
|---|---|---|---|
| Pag. 14 | l. 12. | dalla | della |
| 16 | » ul. | V. S. e il Sig. | V. S. |
| 37 | » 3 | macchi-ne | macchi-na |
| 54 | » 3 | scodela | scodella |
| 89 | » 7 | poligno | poligono |
| 267 | » 2 | linae » 3 linae | lineæ » 3 lineæ |
| 267 | » 13 | ominum | omnium |
| 270 | » 22 | *tempo-bus* | *tempo ribus* |
| 315 | » 18 | (Fig. LXXVI.) | ( Fig. LXXIV. ) |
| 317 | » 5 | iter | inter |
| 344 | » 30 | eaqualia | æqualia |
| 345 | » 2 | qinis | binis. |

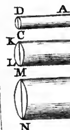
*F. 1*

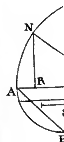
*F*



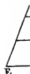

F. 19.


D
A
C
K
L
M
N


N
R
A
B

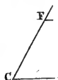


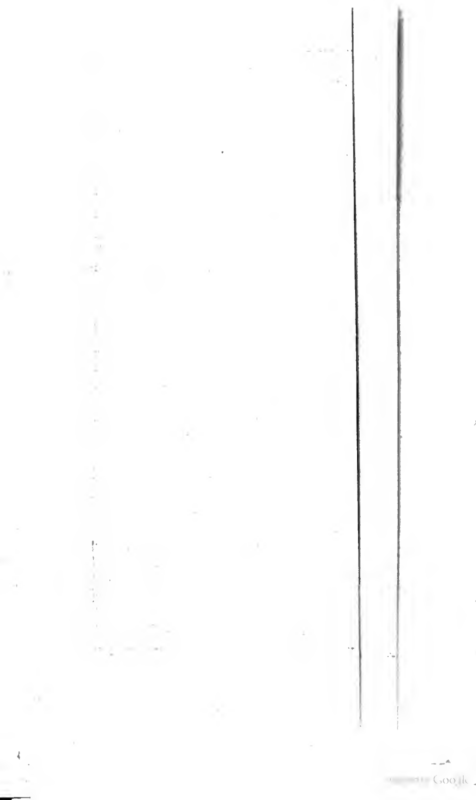

F. 46.




F.





*F. 6*










*F. 8.*



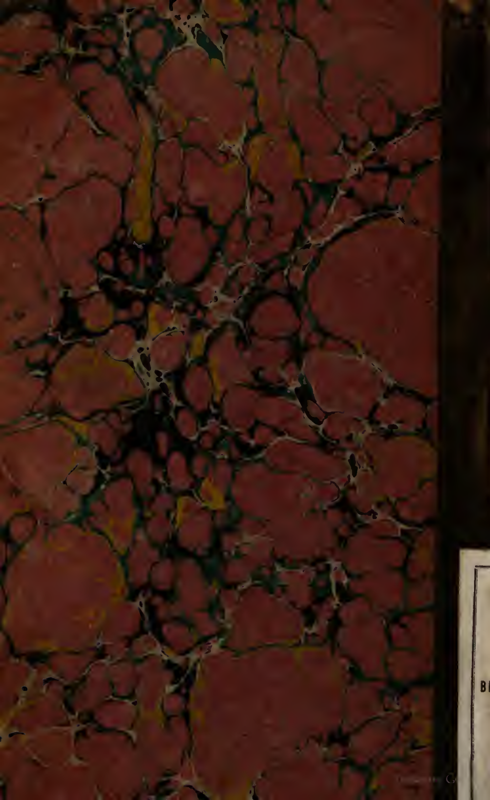
*Ga*



ılile






BI